Geometria Analítica - Prof.ª Cecilia Chirenti

Lista 2 - Dependência Linear e Bases

1. Se possível, desenhe. Se impossível, explique por quê.
   (a) $(\vec{u}, \vec{v})$ $\ell d.$, $(\vec{v}, \vec{w})$ $\ell i.$ e $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ $\ell d.$;
   (b) $(\vec{u}, \vec{v})$ $\ell d.$, $(\vec{v}, \vec{w})$ $\ell i.$ e $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ $\ell i.$;
   (c) $(\vec{u}, \vec{v})$ $\ell d.$, $(\vec{u}, \vec{w})$ $\ell d.$ e $(\vec{v}, \vec{w})$ $\ell i.$;
   (d) $(\vec{u}, \vec{v})$ $\ell i.$, $(\vec{u}, \vec{w})$ $\ell i.$ e $(\vec{v}, \vec{w})$ $\ell d.$;

2. Verdadeiro ou falso. Explique.
   (a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ implica que A, B e C são colineares.
   (b) Se os 4 pontos A, B, C e D são não coplanares, então os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ também são não coplanares.

3. Sendo $3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} = 0$, prove que $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$ são $\ell d.$ para qualquer O.

4. Dados os vetores $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ e $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ tais que $2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} = 0$, prove que os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são $\ell d.$.

5. Sejam $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ três vetores quaisquer, $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{v} = -\vec{b} - \vec{c}$ e $\vec{w} = \vec{a} - \vec{c}$. Prove que $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são $\ell d.$.

6. Sejam O, A, B e C quatro pontos tais que $\overrightarrow{OA} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{OB} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$ e $\overrightarrow{OC} = 2\vec{a} + m\vec{b}$. Sendo $\vec{a}$ e $\vec{b}$ vetores $\ell i.$, determine m para que os vetores $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BC}$ sejam $\ell d.$. Ilustre o problema com um desenho.

7. No $\triangle ABC$ temos $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $3\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{PC}$ e $\overrightarrow{BQ} = \lambda\overrightarrow{BC}$. Determine λ para que $\overrightarrow{PQ}$ fique paralelo ao vetor $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$.

8. Dados os vetores $\vec{a} = (5, -1, 0)$, $\vec{b} = (2, 0, 1)$ e $\vec{c} = (0, 1, 3)$, escreva o vetor $\vec{x} = (2, -1, -1)$ como combinação linear de $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$.

9. É possível escrever $(0, 0, 1)$ como combinação linear de $(1, 2, 1)$, $(1, 0, 1)$ e $(1, 1, 1)$? Se quatro vetores de V^3 são sempre $\ell d.$, como interpretar a resposta anterior?

10. Os vetores $\vec{u} = (a, -1, b+1)$ e $\vec{v} = (4, a-5, b-1)$ são paralelos. Determine as coordenadas de $\vec{u} + \vec{v}$.

11. $\overrightarrow{OA} = (4, -3, -1)$, $\overrightarrow{OB} = (-5, 3, -7)$ e $\overrightarrow{OC} = (1, y, z)$. Determine y e Z sabendo que C pertence à reta AB.

12. Sejam $\vec{u} = (m, -1, m^2+1)$, $\vec{v} = (m^2+1, m, 0)$ e $\vec{w} = (m, 1, 1)$. Mostre que $C = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é uma base de V^3, independentemente do valor de m.

13. Seja $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base. Sejam $\vec{f}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{f}_2 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ e $\vec{f}_3 = -2\vec{e}_3$.

    (a) Mostre que $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ também é uma base.

    (b) Resolva $(x, y, z)_E = (3, -2, 4)_F$.

    (c) Determine na base F as coordenadas de $\vec{v} = (1, 2, -1)_E$.

14. Seja $B = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ uma base de V^3.

    (a) Demostre que $C = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$, com $\vec{v}_1 = \vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 + \vec{u}_3$, $\vec{v}_2 = \vec{u}_1 - \vec{u}_2 - \vec{u}_3$ e $\vec{v}_3 = 2\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + 4\vec{u}_3$, é base de v^3.

    (b) Se $\vec{a} = (1, -3, 2)_B$, quais são as coordenadas de $\vec{a}$ na base C?

    (c) Se $\vec{b} = (-1, 1, 2)_C$, quais são as coordenadas de $\vec{b}$ na base B?

15. Dadas as bases: $E = ((-1, 1, 0)_B,\ (1, 1, 2)_B,\ (-1, 0, 1)_B)$ e $F = ((0, 1, 1)_E,\ (1, 2, -1)_E,\ (2, -1, 0)_E)$, determine na base B as coordenadas de $\vec{v} = (-1, 2, -3)_E - (-2, 1, 1)_F$.

16. Exercícios dos Capítulos 6, 7 e 8 do livro do Boulos.