Funções de Várias Variáveis - 2º quadrimestre de 2010

Prof.ª Cecilia Chirenti

Lista 2 - Derivadas Parciais e Plano Tangente

1. Seja $f(x,y) = x^2 + 3y^2$. Calcule pela definição (usando o limite) $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ no ponto $(3,2)$.

2. Seja $f(x,y) = 4xy^2$. Calcule pela definição (usando o limite) $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ no ponto $(-1,2)$.

3. Determine as derivadas parciais de $f(x.y)$ definida como

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x+y^4}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

4. Seja a função

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{\left(\frac{1}{x^2+y^2-1}\right)} & \text{se} \quad x^2+y^2 < 1 \\ 0 & \text{se} \quad x^2+y^2 \geq 1 \end{cases}$$

   (a) Esboce o gráfico de f.

   (b) Determine $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$.

5. Determine as derivadas parciais para as seguintes funções:

   (a) $f(x,y) = 7x + 10y$

   (b) $f(x,y) = x^2 + 3y^2$

   (c) $f(x,y) = \frac{1}{x^2} + \frac{3}{y}$

   (d) $f(x,y) = \frac{2}{x^3} - \frac{6}{y^2}$

   (e) $f(x,y) = x^{1/2} + y^{1/2}$

   (f) $f(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

   (g) $f(x,y) = 4x^2y$

   (h) $f(x,y) = 10xy^2 + 5x^2y$

   (i) $f(x,y) = e^x + 2x^2 + 6y + 10$

   (j) $f(x,y) = \ln x + 4y^3 + 9$

   (k) $z = \ln \frac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{x+\sqrt{x^2-y^2}}$

   (l) $z = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$

   (m) $z = e^y \operatorname{arcsen}(x-y)$

   (n) $z = (\operatorname{tg} y)^{1/x}$

   (o) $u = \sqrt{\left(\frac{y^2-z^2}{y^2+z^2}\right)^x}$

6. Considere a função $f(x,y) = 2x + 3y$. Calcule $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$.

7. Se $f(x,y) = \operatorname{arctg}(xy) + \operatorname{sen}(xy) + xy + 1$, verifique que $x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

8. Se $z = x^4 + \operatorname{sen}(x+y) - y\ln x$, verificar que $\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial^2 x} - 2\frac{\partial^3 z}{\partial^2 y \partial x} + \frac{\partial^3 z}{\partial^3 y} = \frac{1}{x^2}$.

9. Achar a equação do plano tangente e as equações da reta normal às superfícies abaixo no ponto indicado:

   (a) o cone $z^2 = x^2 + y^2$ no ponto $(3, 4, 5)$

   (b) o parabolóide $z = xy$ no ponto $(2, 3, 6)$

   (c) $x^2 + 4y^2 = 5z$ no ponto $(3, -2, 5)$

10. Determine o plano que passa pelos pontos $(1, 1, 2)$ e $(-1, 1, 1)$ e que seja tangente ao gráfico de $f(x, y) = xy$.

11. Achar os pontos da superfície $z = x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9$, em que o plano tangente é paralelo ao plano xy.

12. A esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 50$ e o parabolóide hiperbólico $z = \frac{5}{12}xy$ passam pelo ponto $(3, 4, 5)$. Achar o ângulo formado pelos seus planos tangentes nesse ponto.