

Funções de Várias Variáveis - 2º quadrimestre de 2010

Prof.^a Cecilia Chirenti

Lista 5 - Derivada direcional e gradiente - Integral de Linha

1. Encontre as derivadas direcionais das seguintes funções no ponto dado segundo a direção indicada. Ache ainda o módulo e a direção do gradiente no mesmo ponto.
 - (a) $u = x^2 + y^2$, no ponto $P(2, 1)$ seguindo a direção que faz um ângulo $\alpha = 60^\circ$ com a horizontal.
 - (b) $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, $P(2, 1)$, $\alpha = 30^\circ$.
 - (c) $z = e^x \cos y$, $P(0, 0)$, $\alpha = 60^\circ$.
 - (d) $u = 2x^2 - y^2 + z^2$, $P(1, 2, 3)$, na direção da reta determinada pelos pontos $P(1, 2, 3)$ e $Q(3, 5, 0)$.
 - (e) $u = xy + yz + xz$, $P(1, 1, 1)$, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 60^\circ$.
 - (f) $u = x^2 + 2xy + z^2 - x$, $P(1, 2, 2)$, na direção do vetor $\vec{v} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.
 - (g) $u = \frac{x+1}{y+1}$, $P(3, 4)$, na direção tangente ao círculo $x^2 + y^2 = 25$ no ponto dado.
 - (h) $u = \frac{x+2y}{x^2+y^2+1}$, $P(-1, 1)$, direção da tangente à curva $x^2 - 2xy + 2y^2 = 5$ no ponto dado.
2. Se o potencial V de um campo eletrostático é dado pela fórmula $V = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, achar o valor e a direção da derivada direcional máxima.
3. A densidade de uma distribuição de massa varia em relação a uma origem dada segundo a fórmula $\rho = \frac{16}{x^2+y^2+3}$. Achar a derivada direcional da densidade no ponto $(1, 2)$ na direção $\alpha = 45^\circ$. Em que direção a variação de ρ é máxima?
4. Calcular a integral $\int_{(1,0)}^{(0,1)} (x+y)dx + (x-y)dy$ ao longo de:
 - (a) arco do círculo $x^2 + y^2 = 1$;
 - (b) linha ABC , onde $A(1, 0)$, $B(1, 1)$ e $C(0, 1)$.
5. Calcular $\int_{(0,0)}^{(1,2)} (x+y^2)dx + 2xy^2dy$ ao longo de:
 - (a) segmento retilíneo;
 - (b) arco de parábola $y = 4x^2$;

- (c) linha OAB , onde $O(0,0)$, $A(1,0)$ e $B(0,1)$.
6. Calcular $\int_{(-1,0)}^{(1,2)} (x^2 + 2xy)dx + (x^2 - y)dy$ ao longo de:
- reta $y = x + 1$;
 - parábola $2y = (x + 1)^2$;
 - círculo $x = 1 + 2 \cos \theta$, $y = 2 \sin \theta$ ($-\pi \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$).
7. Calcular $\int_{(0,2)}^{(2,0)} (x^2 - y^2)dx + ydy$ ao longo de:
- segmento AB , onde $A(0,2)$ e $B(2,0)$;
 - círculo $x^2 + y^2 = 4$.
8. Calcular $\oint \sqrt{x+y}dx + \sqrt{x+y}dy$ ao longo da elipse $bx^2 + ay^2 = a^2b^2$.
9. Calcular $\oint x^3dy - y^3dx$ ao longo do círculo $x^2 + y^2 = a^2$.
10. Calcular $\oint (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy$ ao longo do triângulo de vértices $O(0,0)$, $A(1,0)$ e $B(0,1)$.
11. Achar a área da região limitada pela curva $x = a(2 \cos \theta + \cos 2\theta)$, $y = a(\sin \theta - \sin 2\theta)$.
12. Calcular o trabalho realizado pela força $\vec{F} = -y^2\vec{i} + x^2\vec{j}$, quando seu ponto de aplicação percorre o arco AB do círculo $x^2 + y^2 = 1$, onde $A(1,0)$ e $B(0,1)$.
13. Exercícios do Capítulo 13 do livro Um Curso de Cálculo, vol. 2, H.L. Guidorizzi.
14. Exercícios dos Capítulos 1 e 6 do livro Um Curso de Cálculo, vol. 3, H.L. Guidorizzi.
15. Exercícios dos Capítulos 14.6 e 16.1-3 do livro Cálculo, vol. 2, J. Stewart.