

Funções de Várias Variáveis - 2º quadrimestre de 2010

Prof.<sup>a</sup> Cecilia Chirenti

Lista 5 - Derivada direcional e gradiente - Integral de Linha

1. Encontre as derivadas direcionais das seguintes funções no ponto dado segundo a direção indicada. Ache ainda o módulo e a direção do gradiente no mesmo ponto.
  - (a)  $u = x^2 + y^2$ , no ponto  $P(2, 1)$  seguindo a direção que faz um ângulo  $\alpha = 60^\circ$  com a horizontal.
  - (b)  $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $P(2, 1)$ ,  $\alpha = 30^\circ$ .
  - (c)  $z = e^x \cos y$ ,  $P(0, 0)$ ,  $\alpha = 60^\circ$ .
  - (d)  $u = 2x^2 - y^2 + z^2$ ,  $P(1, 2, 3)$ , na direção da reta determinada pelos pontos  $P(1, 2, 3)$  e  $Q(3, 5, 0)$ .
  - (e)  $u = xy + yz + xz$ ,  $P(1, 1, 1)$ ,  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\beta = 45^\circ$ ,  $\gamma = 60^\circ$ .
  - (f)  $u = x^2 + 2xy + z^2 - x$ ,  $P(1, 2, 2)$ , na direção do vetor  $\vec{v} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ .
  - (g)  $u = \frac{x+1}{y+1}$ ,  $P(3, 4)$ , na direção tangente ao círculo  $x^2 + y^2 = 25$  no ponto dado.
  - (h)  $u = \frac{x+2y}{x^2+y^2+1}$ ,  $P(-1, 1)$ , direção da tangente à curva  $x^2 - 2xy + 2y^2 = 5$  no ponto dado.
2. Se o potencial  $V$  de um campo eletrostático é dado pela fórmula  $V = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ , achar o valor e a direção da derivada direcional máxima.
3. A densidade de uma distribuição de massa varia em relação a uma origem dada segundo a fórmula  $\rho = \frac{16}{x^2+y^2+3}$ . Achar a derivada direcional da densidade no ponto  $(1, 2)$  na direção  $\alpha = 45^\circ$ . Em que direção a variação de  $\rho$  é máxima?
4. Calcular a integral  $\int_{(1,0)}^{(0,1)} (x+y)dx + (x-y)dy$  ao longo de:
  - (a) arco do círculo  $x^2 + y^2 = 1$ ;
  - (b) linha  $ABC$ , onde  $A(1, 0)$ ,  $B(1, 1)$  e  $C(0, 1)$ .
5. Calcular  $\int_{(0,0)}^{(1,2)} (x+y^2)dx + 2xy^2dy$  ao longo de:
  - (a) segmento retilíneo;
  - (b) arco de parábola  $y = 4x^2$ ;

- (c) linha  $OAB$ , onde  $O(0,0)$ ,  $A(1,0)$  e  $B(0,1)$ .
6. Calcular  $\int_{(-1,0)}^{(1,2)} (x^2 + 2xy)dx + (x^2 - y)dy$  ao longo de:
- reta  $y = x + 1$ ;
  - parábola  $2y = (x + 1)^2$ ;
  - círculo  $x = 1 + 2 \cos \theta$ ,  $y = 2 \sin \theta$  ( $-\pi \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ).
7. Calcular  $\int_{(0,2)}^{(2,0)} (x^2 - y^2)dx + ydy$  ao longo de:
- segmento  $AB$ , onde  $A(0,2)$  e  $B(2,0)$ ;
  - círculo  $x^2 + y^2 = 4$ .
8. Calcular  $\oint \sqrt{x+y}dx + \sqrt{x+y}dy$  ao longo da elipse  $bx^2 + ay^2 = a^2b^2$ .
9. Calcular  $\oint x^3dy - y^3dx$  ao longo do círculo  $x^2 + y^2 = a^2$ .
10. Calcular  $\oint (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy$  ao longo do triângulo de vértices  $O(0,0)$ ,  $A(1,0)$  e  $B(0,1)$ .
11. Achar a área da região limitada pela curva  $x = a(2 \cos \theta + \cos 2\theta)$ ,  $y = a(\sin \theta - \sin 2\theta)$ .
12. Calcular o trabalho realizado pela força  $\vec{F} = -y^2\vec{i} + x^2\vec{j}$ , quando seu ponto de aplicação percorre o arco  $AB$  do círculo  $x^2 + y^2 = 1$ , onde  $A(1,0)$  e  $B(0,1)$ .
13. Exercícios do Capítulo 13 do livro Um Curso de Cálculo, vol. 2, H.L. Guidorizzi.
14. Exercícios dos Capítulos 1 e 6 do livro Um Curso de Cálculo, vol. 3, H.L. Guidorizzi.
15. Exercícios dos Capítulos 14.6 e 16.1-3 do livro Cálculo, vol. 2, J. Stewart.