Funções Complexas e Transformadas Integrais

Prof.ª Cecilia Chirenti

Lista 4 - Séries e Singularidades - Resíduos

1. Para quais valores de z cada uma das séries converge?

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2)^n}{n!}$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(z-i)^n}{n+1}$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n!(z^2+2z+2)^{2n}$

2. Localize no plano complexo todas as singularidades das funções abaixo, se existirem, e classifique-as.

   (a) $\displaystyle\frac{z-2}{2z+1}^{4}$

   (b) $\displaystyle\frac{z}{(z-1)(z+2)^2}$

   (c) $\displaystyle\frac{z^2+1}{z^2+2z+2}$

   (d) $\displaystyle\cos\frac{1}{z}$

   (e) $\displaystyle\frac{\operatorname{sen}(z-\pi/3)}{3z-\pi}$

   (f) $\displaystyle\frac{\cos z}{(z^2+4)^2}$

3. Encontre a série de Laurent ao redor da singularidade indicada de cada uma das funções abaixo, classificando a singularidade em cada caso. Indique a região de convergência de cada série.

   (a) $\displaystyle\frac{\cos z}{z-\pi}\,,\ z=\pi$

   (b) $z^2 e^{-1/z}\,,\ z=0$

   (c) $\displaystyle\frac{z}{(z-1)^2(z+3)}\,,\ z=1$

4. Determine os resíduos de cada função em seus pólos

   (a) $\displaystyle\frac{2z+3}{z^2-4}$

   (b) $\displaystyle\frac{z-3}{z^3+5z^2}$

   (c) $\displaystyle\frac{e^{zt}}{(z-2)^3}$

   (d) $\displaystyle\frac{z}{(z^2+1)^2}$

5. Encontre o resíduo de $e^{zt}\operatorname{tg} z$ no pólo simples $z = 3\pi/2$.

6. Calcule

   $$\oint_C \frac{z^2\,dz}{(z+1)(z+3)}\,,$$

   onde C é uma curva simples fechada envolvendo todos os pólos.

7. Se C é uma curva simples fechada envolvendo $z = \pm i$, mostre que

$$\oint_C \frac{ze^{zt}dz}{(z^2+1)^2} = \frac{1}{2} t \operatorname{sen} t\,.$$

8. Verifique as integrais abaixo.

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{x^4+1} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

(b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+4)^2} = \frac{\pi}{32}$

(c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(2+\cos\theta)^2} = \frac{4\pi\sqrt{3}}{9}$

(d) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{5-4\cos\theta} d\theta = \frac{\pi}{8}$

(e) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2 x\,dx}{x^2} = \frac{\pi}{2}$

(f) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^3 x\,dx}{x^3} = \frac{3\pi}{8}$