Funções Complexas e Transformadas Integrais

Prof.ª Cecilia Chirenti

Lista 5 - Séries de Fourier e Aplicações

1. Faça o gráfico de cada uma das funções abaixo e determine a série de Fourier correspondente. Utilize, quando aplicáveis, propriedades das funções pares e ímpares. Localize as descontinuidades de $f(x)$ em cada caso e diga para quais valores as séries convergem nessas descontinuidades.

   (a) $f(x) = \begin{cases} 8 & 0 < x < 2 \\ -8 & 2 < x < 4 \end{cases}$

   (b) $f(x) = \begin{cases} -x & -4 \leq x \leq 0 \\ x & 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$

   (c) $f(x) = 4x\,,\ 0 < x < 10$

   (d) $f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & -3 < x < 0 \end{cases}$

   (e) $f(x) = \begin{cases} 2 - x & 0 \leq x \leq 4 \\ x - 6 & 4 < x < 8 \end{cases}$

2. Desenvolva $f(x) = \cos x\,,\ 0 < x < \pi$ em uma série de Fourier de senos.

3. Desenvolva em série de senos e em série de cossenos:

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 4 \\ 8 - x & 4 < x < 8 \end{cases}$$

4. Prove que, para $0 \leq x \leq \pi$

   (a) $x(\pi - x) = \dfrac{\pi^2}{6} - \left(\dfrac{\cos 2x}{1^2} + \dfrac{\cos 4x}{2^2} + \dfrac{\cos 6x}{3^2} + \cdots \right)$

   (b) $x(\pi - x) = \dfrac{8}{\pi} \left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{1^3} + \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{3^3} + \dfrac{\operatorname{sen} 5x}{5^3} + \cdots \right)$

5. Use o problema 4 para provar que

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$

6. Use novamente o problema 4 e a identidade de Parseval para mostrar que

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{pi^6}{945}$

7. Resolva o problema de contorno

$$\frac{\partial u}{\partial t}=2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,,\ u(0,t)=u(4,t)=0\,,\ u(x,0)=25x\,,$$

onde $0<x<4$ e $t>0$. Interprete fisicamente o problema.

8. Mostre que a solução do problema de contorno

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,,\ u_x(0,t)=u_x(\pi,t)=0\,,\ u(x,0)=f(x)\,,$$

onde $0<x<\pi$ e $t>0$ é dada por

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx+\frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}e^{-m^2t}\cos mx\int_0^{\pi}f(x)\cos mx\,dx\,,$$

e interprete fisicamente o problema.

9. Determine a temperatura estacionária em uma barra cujas extremidades estão localizadas em $x=0$ e $x=10$, se essas extremidades são mantidas às temperaturas de 150^o e 100^o, respectivamente.

10. Distende-se uma corda de 2 metros de comprimento entre dois pontos fixos $x=0$ e $x=2$. Se o deslocamento da corda, a partir do eixo x, no instante t, é dado por $f(x)=0,03x(2-x)$ e se a velocidade inicial é zero, determine o deslocamento em um instante subseqüente.

11. Resolva o problema 10 se a corda tem suas extremidades fixas em $x=0$ e $x=L$ e se o deslocamento e a velocidade iniciais são dados, respectivamente, por $f(x)$ e $g(x)$.