Álgebra Linear Avançada II

Prof.ª Cecilia Chirenti

Lista 1 - Formas Bilineares

1. Sejam $u = (x_1, x_2)$ e $v = (y_1, y_2)$. Determine quais das seguintes são formas bilineares em $\mathbf{R}^2$

   (a) $f(u, v) = 2x_1y_2 - 3x_2y_1$

   (b) $f(u, v) = x_1 + y_2$

   (c) $f(u, v) = 3x_2y_2$

   (d) $f(u, v) = x_1x_2 + y_1y_2$

   (e) $f(u, v) = 1$

   (f) $f(u, v) = 0$

2. Seja f a forma bilinear em $\mathbf{R}^2$ definida por
   $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 3x_1y_1 - 2x_1y_2 + 4x_2y_1 - x_2y_2$

   (a) Encontre a matriz A de f na base $\{u_1 = (1, 1), u_2 = (1, 2)\}$.

   (b) Encontre a matrix B de f na base $\{v_1 = (1, -1), v_2 = (3, 1)\}$.

   (c) Encontre a matrix de transição P de $\{u_i\}$ a $\{v_i\}$ e verifique que $B = P^tAP$.

3. Seja V o espaço vetorial das matrizes 2×2 sobre $\mathbf{R}$. Seja $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ e seja $f(A, B) = \mathrm{tr}\,(A^tMB)$, onde $A, B \in V$.

   (a) Mostre que f é uma forma bilinear em V.

   (b) Encontre a matrix de f na base $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.

4. Seja $B(V)$ o espaço das formas bilineares em V sobre K. Demostre

   (a) Se $f, g \in B(V)$, então $f + g$ e kf, para $k \in K$, também pertencem a $B(V)$; logo, $B(V)$ é um subespaço do espaço vetorial de funções de $V \times V$ em K.

   (b) Se ϕ e σ são funcionais lineares em V, então $f(u, v) = \phi(u)\sigma(v)$ pertence a $B(V)$.

5. Seja f uma forma bilinear em V. Para qualquer subconjunto S de V, escrevemos
   $S^\perp = \{v \in V \mid f(u, v) = 0 \;\forall\; u \in S\}$
   $S^\top = \{v \in V \mid f(v, u) = 0 \;\forall\; u \in S\}$
   Mostre que

(a) $S^{\perp}$ e $S^{\top}$ são subespaços de V.

(b) $S_1 \subset S_2$ implica $S_2^{\perp} \subset S_1^{\perp}$ e $S_2^{\top} \subset S_1^{\top}$.

(c) $\{0\}^{\perp} = \{0\}^{\top} = V$.

(d) $\operatorname{posto}(f) = \dim V - \dim V^{bot} = \dim V - \dim V^{\top}$ e, portanto, $\dim V^{\perp} = \dim V^{\top}$.

6. Mostre que congruência de matrizes é uma relação de equivalência.