Álgebra Linear Avançada II

Prof.ª Cecilia Chirenti

Lista 3 - Espaços com produto interno

1. Sejam $u = (x_1, x_2)$ e $v = (y_1, y_2)$ pertencentes a $\mathbb{R}^2$.

   (a) Verifique que $f(u, v) = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2$ é um produto interno no $\mathbb{R}^2$

   (b) Para que valores de k temos que $f(u, v) = x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + kx_2y_2$ é um produto interno no $\mathbb{R}^2$?

   (c) Para que valores de $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ temos que $f(u, v) = ax_1y_1 + bx_1y_2 + cx_2y_1 + dx_2y_2$ é um produto interno no $\mathbb{R}^2$?

   (d) Encontre a norma de $v = (1, 2) \in \mathbb{R}^2$ em relação ao produto interno usual e em relação ao produto interno do item (a).

2. Sejam $u = (z_1, z_2)$ e $v = (w_1, w_2)$ pertencentes a $\mathbb{C}^2$.

   (a) Verifique que $f(u, v) = z_1\overline{w}_1 + (1 + i)z_1\overline{w}_2 + (1 - i)z_2\overline{w}_1 + 3z_2\overline{w}_2$ é um produto interno em $\mathbb{C}^2$

   (b) Para que valores de $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ temos que $f(u, v) = az_1\overline{w}_1 + bz_1\overline{w}_2 + cz_2\overline{w}_1 + dz_2\overline{w}_2$ é um produto interno em $\mathbb{C}^2$?

   (c) Encontre a norma de $v = (1 - 2i, 2 + 3i) \in \mathbb{C}^2$ em relação ao produto interno usual e em relação ao produto interno do item (a).

3. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $T(x, y, z) = (x + 2y, 3x - 4z, y)$. Encontre $T^*(x, y, z)$.

4. Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ definido por $T(x, y, z) = (ix + (2+3i)y, 3x + (3-i)z, (2-5i)y + iz)$. Encontre $T^*(x, y, z)$.

5. Encontre uma matriz ortogonal simétrica cuja primeira linha seja $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

6. Encontre uma matriz unitária cuja primeira linha seja $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i)$.

7. Mostre que o produto de matrizes unitárias é uma matriz unitária, e a inversa de uma matriz unitária é uma matrix unitária. (As matrizes unitárias formam um grupo sob a operação de multiplicação chamado grupo unitário.)

8. Seja W um subespaço de V. Para qualquer $v \in V$, podemos escrever v de maneira única como $v = w + w'$, com $s \in W$ e $w' \in W^{\perp}$. Seja $T : V \to V$ definida por $T(v) = w - w'$. Mostre que T é um operador unitário auto-adjunto em V.

9. Seja T um operador linear em V e seja $f : V \times V \to K$ definida por $f(u,v) =< T(u), v >$. Mostre que f é um produto interno em V se, e somente se, T é definido positivo.

10. Para qualquer operador T, mostre que $T + T^*$ é auto-adjunto e $T - T^*$ é anti-adjunto.

11. Encontre uma transformação ortogonal de coordenadas que diagonalize as formas quadráticas:

    (a) $q(x,y) = 2x^2 - 6xy + 10y^2$ (b) $q(x,y) = x^2 + 8xy - 5y^2$

12. Suponha que T é um operador normal (ou seja, $TT^* = T^*T$). Mostre que

    (a) T é auto-adjunto se, e somente se, seus autovalores são reais.

    (b) T é unitário se, e somente se, seus auto-valores têm valor absoluto 1.

    (c) T é positivo se, e somente se, seus autovalores são números reais não negativos.