Álgebra Linear Avançada II

Prof.ª Cecilia Chirenti

Lista 5 - Determinantes

1. Seja T o operador linear no $\mathbb{R}^3$ definido por $T(x,y,z) = (3x-2y, 5y+7z, x+y+z)$. Encontre $\det(T)$.

2. Seja $D : V \to V$ o operador diferencial, isto é, $D(v) = \frac{dv}{dt}$. Encontre $\det(D)$ se V é o espaço gerado por

   (a) $\{1, t, \ldots, t^n\}$ (b) $\{e^t, e^{2t}, e^{3t}\}$ (c) $\{\operatorname{sen} t, \cos t\}$

3. Seja A uma matriz quadrada $m \times m$. Prove que $\det(kA) = k^n \det(A)$.

4. Considere a matriz de blocos $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ onde A e C são matrizes quadradas. Prove que $\det(M) = \det(A)\det(C)$.

5. Sejam A, B, C e D matrizes quadradas que comutam. Considere a matriz quadrada de blocos $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$. Prove que $\det(M) = \det(A)\det(D) - \det(B)\det(C)$.

6. Suponha que A é uma matriz ortogonal, ou seja, $A^tA = I$. Mostre que $\det(A) = \pm 1$.

7. Seja $V = (K^m)^m$, isto é, o espaço das matrizes quadradas $m \times m$ encaradas como m-uplas de vetores linhas. Seja $D : V \to K$.

   (a) Mostre que a seguinte assertiva mais fraca é equivalente a D sendo alternada: $D(A_1, A_2, \ldots, A_m) = 0$ sempre que $A_i = A_{i+1}$ para algum i.

   (b) Suponha que D é m-linear e alternada. Mostre que, se $A_1, A_2, \ldots, A_m$ são linearmente dependentes, então $D(A_1, A_2, \ldots, A_m) = 0$.

8. Seja V o espaço das matrizes 2×2 $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sobre $\mathbb{R}$. Determine se $D : V \to \mathbb{R}$ é 2-linear (em relação às linhas) se

   (a) $D(M) = ac - bd$
   (b) $D(M) = ab - cd$
   (c) $D(M) = 0$
   (d) $D(M) = 1$

9. Seja V o espaço das matrizes quadradas $n \times n$ sobre K. Suponha que $B \in V$ é inversível; logo $\det(B) \neq 0$. Defina $D : V \to K$ por $D(A) = \det(AB)/\det(B)$, onde $A \in V$. Portanto,

$$D(A_1, A_2, \ldots, A_n) = \det(A_1B, A_2B, \ldots, A_nB)/\det(B),$$

onde A_iB é a i-ésima linha de AB. Mostre que D é multilinear e alternada e que $D(I) = 1$. (Assim, $D(A) = \det(A)$; logo, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.)