Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias

Prof.ª Cecilia Chirenti

Lista 7 - Equação de Cauchy-Euler e Sistemas de Equações Diferenciais Lineares

1. Determine uma solução geral das seguintes equações diferenciais

   (a) $x^2y'' + xy' - y = 0\,,$
   (b) $x^2y'' - 3xy' + 3y = 0\,,$
   (c) $x^2y'' + xy' - 4y = 0\,,$
   (d) $x^2y'' - xy' + y = 0\,,$
   (e) $x^2y'' - xy' + 0{,}75y = 0\,,$
   (f) $xy'' - 3y' = 0\,,$
   (g) $x^2y'' + 0{,}25y = 0\,,$
   (h) $xy'' + y' = 0\,.$

2. Dada a equação de Cauchy-Euler,

   $$x^2y'' + axy' + by = 0\,, \quad (a, b \text{ constantes}) \tag{1}$$

   reduza as equações abaixo à forma (1) e resolva:

   (a) $(x+1)^2y'' + 5(x+1)y' + 3y = 0\,,$
   (b) $(2x-3)^2y'' + 7(2x-3)y' + 4y = 0\,.$

3. Resolva os seguintes problemas de valor inicial:

   (a) $x^2y'' + xy' - 0{,}25y = 0\,,\quad y(1) = 2\,,\quad y'(1) = 1\,.$
   (b) $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0\,,\quad y(1) = 1\,,\quad y'(1) = 1\,.$
   (c) $x^2y'' + xy' - 2{,}25y = 0\,,\quad y(1) = 2\,,\quad y'(1) = 0\,.$
   (d) $x^2y'' - 3xy' + 3y = 0\,,\quad y(1) = 0\,,\quad y'(1) = -2\,.$

4. Mostre que, fazendo-se $x = e^t$ $(x > 0)$, a equação de Cauchy-Euler (1) pode ser transformada na equação

   $$\ddot{y} + (a-1)\dot{y} + by = 0\,,$$

   cujos coeficientes são constantes.

5. Determine a equação característica e os autovalores de

   $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

6. Determine a equação característica e os autovalores de

   $$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

7. Determine a equação característica e os autovalores de

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e determine a multiplicidade de cada autovalor.

8. Determine a equação característica e os autovalores de

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} t & t^2 \\ 1 & 2t \end{bmatrix}$$

9. Determine a equação característica e os autovalores de

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} t & 6t & 0 \\ 4t & -t & 0 \\ 0 & 1 & 5t \end{bmatrix}$$

10. Prove que os autovalores de $\mathbf{A}t$ são t vezes os autovalores de $\mathbf{A}$.

11. Defina t_0, os vetores $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{f}(t)$ e $\mathbf{c}$ e a matriz $\mathbf{A}$ para que os sistemas abaixo sejam equivalentes ao sistema matricial de primeira ordem:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t)$$
$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{c}$$

(a) $\ddot{x} - 2\dot{x} + x = t + 1\,; \quad x(1) = 1\,, \quad \dot{x}(1) = 2\,.$

(b) $2\ddot{x} + x = 4e^t\,; \quad x(0) = 1\,, \quad \dot{x}(0) = 1\,.$

(c) $e^t \dfrac{d^3x}{dt^3} - t\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{dx}{dt} - e^t x = 0\,; \quad x(-1) = 1\,, \quad \dot{x}(-1) = 0\,, \quad \ddot{x}(-1) = 1\,.$

(d) $\dfrac{d^3x}{dt^3} = 0\,; \quad x(0) = 1\,, \quad \dot{x}(0) = 0\,, \quad \ddot{x}(0) = 0\,.$

(e) $\begin{cases} \ddot{x} = \dot{x} + \dot{y} - z + t \\ \ddot{y} = tx + \dot{y} - 2y + t^2 + 1 \\ \dot{z} = x - y + \dot{y} + z\,; \end{cases}$

$x(1) = 1\,, \quad \dot{x}(1) = 15\,, \quad y(1) = 0\,, \quad \dot{y}(1) = -7\,, \quad z(1) = 4\,.$

(f) $\begin{cases} \ddot{x} = 2\dot{x} + 5y + 3 \\ \dot{y} = -\dot{x} - 2y\,; \end{cases}$

$x(0) = 0\,, \quad \dot{x}(0) = 0\,, \quad y(0) = 1\,.$

(g) $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y \\ \dot{y} = 4x + 3y\,; \end{cases}$

$x(7) = 2\,, \quad y(7) = -3\,.$

12. Resolva cada um dos seguintes sistemas pelo método matricial.

    (a) $\ddot{x} + 2\dot{x} - 8x = 0\,; \quad x(1) = 1\,, \quad \dot{x}(1) = 0\,.$

    (b) $\ddot{x} + 2\dot{x} - 8x = 4\,; \quad x(0) = 0\,, \quad \dot{x}(0) = 0\,.$

    (c) $\ddot{x} + 2\dot{x} - 8x = 4\,; \quad x(1) = 0\,, \quad \dot{x}(1) = 0\,.$

    (d) $\ddot{x} + 2\dot{x} - 8x = 4\,; \quad x(0) = 1\,, \quad \dot{x}(0) = 2\,.$

    (e) $\ddot{x} + 2\dot{x} - 8x = 9e^{-t}\,; \quad x(0) = 0\,, \quad \dot{x}(0) = 0\,.$

    (f) $\begin{cases} \ddot{x} = 2\dot{x} + 5y + 3 \\ \dot{y} = -\dot{x} - 2y \end{cases}$

    $x(0) = 0\,, \quad \dot{x}(0) = 0\,, \quad y(0) = 1\,.$

    (g) $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y \\ \dot{y} = 4x + 3y \end{cases}$

    (g) $\dfrac{d^3x}{dt^3} = 6t\,; \quad x(0) = 0\,, \quad \dot{x}(0) = 0\,, \quad \ddot{x}(0) = 12\,.$

13. Exercícios do Capítulo 8 do Zill & Cullen (menos a parte de transformada de Laplace).