Funções de Várias Variáveis

Prof.ª Cecilia Chirenti

Lista 5 - Derivada direcional e gradiente - Integral de Linha

1. Encontre as derivadas direcionais das seguintes funções no ponto dado segundo a direção indicada. Ache ainda o módulo e a direção do gradiente no mesmo ponto.

   (a) $u = x^2 + y^2$, no ponto $P(2, 1)$ seguindo a direção que faz um âmgulo $\alpha = 60^o$ com a horizontal.

   (b) $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$, $P(2, 1)$, $\alpha = 30^o$.

   (c) $z = e^x \cos y$, $P(0, 0)$, $\alpha = 60^o$.

   (d) $u = 2x^2 - y^2 + z^2$, $P(1, 2, 3)$, na direção da reta determinada pelos pontos $P(1, 2, 3)$ e $Q(3, 5, 0)$.

   (e) $u = xy + yz + xz$, $P(1, 1, 1)$, $\alpha = 60^o$, $\beta = 45^o$, $\gamma = 60^o$.

   (f) $u = x^2 + 2xy + z^2 - x$, $P(1, 2, 2)$, na direção do vetor $\vec{v} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.

   (g) $u = \frac{x+1}{y+1}$, $P(3, 4)$, na direção tangente ao círculo $x^2 + y^2 = 25$ no ponto dado.

   (h) $u = \frac{x+2y}{x^2+y^2+1}$, $P(-1, 1)$, direção da tangente à curva $x^2 - 2xy + 2y^2 = 5$ no ponto dado.

2. Se o potencial V de um campo eletrostático é dado pela fórmula $V = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$, achar o valor e a direção da derivada direcional máxima.

3. A densidade de uma distribuição de massa varia em relação a uma origem dada segundo a fórmula $\rho = \frac{16}{x^2+y^2+3}$. Achar a derivada direcional da densidade no ponto $(1, 2)$ na direção $\alpha = 45^o$. Em que direção a variação de ρ é máxima?

4. Calcular a integral $\displaystyle\int_{(1,0)}^{(0,1)} (x + y)dx + (x - y)dy$ ao longo de:

   (a) arco do círculo $x^2 + y^2 = 1$;

   (b) linha ABC, onde $A(1, 0)$, $B(1, 1)$ e $C(0, 1)$.

5. Calcular $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(1,2)} (x + y^2)dx + 2xy^2dy$ ao longo de:

   (a) segmento retilíneo;

   (b) arco de parábola $y = 4x^2$;

(c) linha OAB, onde $O(0,0)$, $A(1,0)$ e $B(0,1)$.

6. Calcular $\displaystyle\int_{(-1,0)}^{(1,2)} (x^2+2xy)dx + (x^2-y)dy$ ao longo de:

   (a) reta $y = x+1$;

   (b) parábola $2y = (x+1)^2$;

   (c) círculo $x = 1 + 2\cos\theta$, $y = 2\mathrm{sen}\,\theta$ $\left(-\pi \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$.

7. Calcular $\displaystyle\int_{(0,2)}^{(2,0)} (x^2-y^2)dx + ydy$ ao longo de:

   (a) segmento AB, onde $A(0,2)$ e $B(2,0)$;

   (b) círculo $x^2+y^2=4$.

8. Calcular $\displaystyle\oint \sqrt{x+y}dx + \sqrt{x+y}dy$ ao longo da elipse $bx^2+ay^2=a^2b^2$.

9. Calcular $\displaystyle\oint x^3dy - y^3dx$ ao longo do círculo $x^2+y^2=a^2$.

10. Calcular $\displaystyle\oint (x^2+y^2)dx + (x^2-y^2)dy$ ao longo do triângulo de vértices $O(0,0)$, $A(1,0)$ e $B(0,1)$.

11. Achar a área da região limitada pela curva $x = a(2\cos\theta + \cos 2\theta)$, $y = a(\mathrm{sen}\,\theta - \mathrm{sen}\,2\theta)$.

12. Calcular o trabalho realizado pela força $\vec{F} = -y^2\vec{i} + x^2\vec{j}$, quando seu ponto de aplicação percorre o arco AB do círculo $x^2+y^2=1$, onde $A(1,0)$ e $B(0,1)$

13. Exercícios do Capítulo 13 do livro Um Curso de Cálculo, vol. 2, H.L. Guidorizzi.

14. Exercícios dos Capítulos 1 e 6 do livro Um Curso de Cálculo, vol. 3, H.L. Guidorizzi.

15. Exercícios dos Capítulos 14.6 e 16.1-3 do livro Cálculo, vol. 2, J. Stewart.