Álgebra Linear - Prof.ª Cecilia Chirenti

Lista 3 - Matrizes

1. Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$,
$C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Encontre:

   (a) $A+B$, $A+C$, $3A-4B$.

   (b) AB, AC, AD, BC, BD, CD

   (c) A^t, A^tC, D^tA^t, B^tA, D^tD, DD^t

2. Sejam $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ e $e_3 = (0,0,1)$. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix}$, encontre e_1A, e_2A e e_3A.

3. Seja $e_i = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ onde 1 é a i-ésima componente. Mostre:

   (a) $e_iA = L_i$, a i-ésima linha da matriz A

   (b) $Be_j^t = C_j$, a j-ésima coluna da matriz B

   (c) Se $e_iA = e_iB$ para todo i, então $A = B$

   (d) Se $Ae_i^t = Be_i^t$ para todo i, então $A = B$

4. Reduza A à forma escalonada e depois à sua forma canônica por linhas:

   (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 6 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

   (b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & -5 & 6 & -5 & 7 \end{pmatrix}$

   (c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

   (d) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

5. Descreva todas as matrizes 2×2 possíveis, que estão na forma escalonada reduzida por linhas (forma canônica por linhas).

6. Suponha que A é uma matriz quadrada escalonada reduzida por linhas. Mostre que se $A \neq I$, a matriz identidade, então A tem uma linha nula.

7. Mostre que toda matriz quadrada escalonada é triangular superior, mas o contrário não é verdadeiro.

8. Mostre que a equivalência por linhas é uma relação de equivalência, ou seja,

   (a) A é equivalente por linhas a A;

   (b) A equivalente por linhas a B implica B equivalente por linhas a A;

   (c) A equivalente por linhas a B e B equivalente por linhas a C implica A equivalente por linhas a C.

9. Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

   (a) Encontre A^2 e A^3.

   (b) Se $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 4$ encontre $f(A)$.

   (c) Se $g(x) = x^2 - x - 8$, encontre $g(A)$.

10. Seja $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

   (a) Se $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$ encontre $f(B)$.

   (b) Se $g(x) = x^2 - 4x - 12$ encontre $g(B)$.

   (c) Encontre um vetor coluna não-nulo $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tal que $Bu = 6u$.

11. Duas matrizes A e B são comutativas se $AB = BA$. Encontre todas as matrizes $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ que sejam comutativas com $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

12. Seja $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Encontre A^n.

13. Sejam $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}$. Encontre $A+B$, AB, A^2 e A^3, A^n e $f(A)$ para um polinômio $f(x)$.

14. Sejam $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \\ \dots & \dots \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$.

    Encontre DA e BD.

15. Suponha que a matriz quadrada 2×2, B, comuta com qualquer matriz quadrada 2×2, isto é, $AB = BA$ para qualquer matriz A. Mostre que $B = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ para algum escalar k, ou seja, B é uma matriz escalar.

16. Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ e se $AB = BA$, prove que

   (a) $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$

(b) $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$

(c) $(A-B)(A^2+AB+B^2) = A^3 - B^3$

17. O produto de duas matrizes anti-simétricas é uma matriz anti-simétrica? Justifique.

18. Determine uma matriz $A \in M_2(\mathbb{R})$ tal que $A \neq 0$ e $A^2 = AA = 0$.

19. Efetue os produtos AB e BA onde $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $B = (1 \quad 2 \quad 1)$.

20. Mostre que se $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ então $A^2 - 6A + 5I_2 = 0$ (matriz nula).

21. Mostre que as matrizes da forma $X = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{y} \\ y & 1 \end{pmatrix}$ onde y é um número real não nulo, verificam a equação $X^2 = 2X$.

22. Determine todas as matrizes quadradas de ordem 3 que comutam com a matriz $X = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ onde a é um número real.

23. Se A e B são matrizes reais de ordem 2 que comutam com a matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, mostre que $AB = BA$.

24. Seja B uma matriz real 2×2 que comuta com a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Mostre que existem números reais a e b tais que $B = aA + bI_2$.

25. Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ são tais que $AB = 0$, pode-se concluir que BA também é a matriz nula? Provê ou dê um contra-exemplo.

26. Seja A uma matriz quadrada inversível. Mostre que A^{-1} também é inversível e que $(A^{-1})^{-1} = A$.

27. Mostre que a matriz real $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$ é inversível para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$ e que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ ac-b & -c & 1 \end{pmatrix}$

28. Encontre a inversa de cada matriz

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 6 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

29. Mostre que as operações de inversão e transposição comutam, isto é, $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$. Assim, em particular, A é inversível se, e somente se, A^t é inversível.

30. Quando uma matriz diagonal $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$ é inversível e qual é a sua inversa?

31. Mostre que A é equivalente por linhas B se, e somente se, existe uma matriz inversível P tal que $B = PA$.

32. Mostre que A é inversível se, e somente se, o sistema $AX = 0$ tem somente a solução nula.

33. Mostre que a multiplicação de matrizes satisfaz a propriedade $(B+C)A = BA + CA$.

34. Uma matriz A é equivalente a uma matriz B se B pode ser obtida de A por uma sequência finita de operações, cada uma sendo uma operação elementar com linhas ou com colunas. Mostre que a equivalência de matrizes é uma relação de equivalência.

35. Mostre que dois sistemas consistentes de equações lineares têm o mesmo conjunto solução se, e somente se, suas matrizes aumentadas são equivalentes por linhas.

36. Resolva os seguintes sistemas de Cramer:

(a) $\begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y + z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ x + y - z + t = 1 \\ -x + y + z - t = 0 \\ 2x - y - z + 3t = 1 \end{cases}$

37. Determine $m \in \mathbb{R}$ de modo que o sistema baixo seja de Cramer e resolva o sistema: $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + 2z = 1 \\ x + 2y + mz = 0 \end{cases}$

38. Sejam A, B e C matrizes reais de ordem n. Se A é inversível, prove que $AB = AC \Rightarrow B = C$ e que $BA = CA \Rightarrow B = C$.

39. Se A, B e C são matrízes inversíveis de mesma ordem, determine X tal que $AB^{-1}X = C^{-1}A$.

40. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, calcule $A^2 = AA$, $A^3 = AAA, \ldots, A^n = A \ldots A$ (n vezes).

41. Determine x, y e z tais que a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x & y & z \end{pmatrix}$ seja ortogonal.

42. Existe alguma matriz inversível A tal que $A^2 = 0$ (matriz nula)? Justifique.