Álgebra Linear - Prof.ª Cecilia Chirenti

Lista 4 - Espaços vetoriais e subespaços

1. Seja V o conjunto das seqüências infinitas $(a_1, a_2, \ldots)$ num corpo K com adição em V e multiplicação por um escalar em V, definidas por

   $(a_1, a_2, \ldots) + (b_1, b_2, \ldots) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots)$

   $k(a_1, a_2, \ldots) = (ka_1, ka_2, \ldots)$

   onde $a_i, b_j, k \in K$. Mostre que V é um espaço vetorial sobre K.

2. Seja V o conjunto dos pares ordenados de números reais. V não é um espaço vetorial em relação a nenhum dos dois pares de operações sobre V:

   (a) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ e $a(x, y) = (x, ay)$

   (b) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1, y_1)$ e $a(x, y) = (ax, ay)$

   Diga em cada caso quais dos 8 axiomas não se verificam.

3. Seja V como no exercício anterior. Definamos:

   $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (2x_1 - 2x_2, -x_1 + y_1), \quad a(x, y) = (3ax, -ax)$

   Com essas operações definidas sobre V, perguntamos se este conjunto é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

4. Determine se W é subespaço de $\mathbb{R}^3$ ou não, onde W consiste nos vetores $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ para os quais

   (a) $a = 2b$

   (b) $a \leq b \leq c$

   (c) $ab = 0$

   (d) $a = b = c$

   (e) $a = b^2$

   (f) $k_1 a + k_2 b + k_3 c = 0$, onde $k_i \in \mathbb{R}$.

5. Seja V o espaço vetorial das matrizes $n \times n$ sobre um corpo K. Mostre que W é subespaço de V se W consiste em todas as matrizes que são

   (a) anti-simétricas ($A^t = -A$)

   (b) triangulares superiormente

   (c) diagonais

   (d) escalares

6. Seja $AX = B$ um sistema não-homogêneo de equações lineares em n incógnitas sobre um corpo K. Mostre que o conjunto solução do sistema não é subespaço de K^n.

7. Seja V o espaço de todas as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Mostre que W é subespaço de V em cada um dos seguintes casos:

   (a) W consiste em todas as funções limitadas

   (b) W consiste em todas as funções pares

   (c) W consiste em todas as funções contínuas

   (d) W consiste em todas as funções diferenciáveis

   (e) W consiste em todas as funções integráveis no intervalo $0 \leq x \leq 1$

8. Considere os vetores $u = (1, -3, 2)$ e $v = (2, -1, 1)$ em $\mathbb{R}^3$.

   (a) Escreva $(1, 7, -4)$ como combinação linear de u e v.

   (b) Escreva $(2, -5, 4)$ como combinação linear de u e v.

   (c) Para que valor de k é $(1, k, 5)$ uma combinação linear de u e v?

   (d) Procure uma condição para a, b, c de modo que (a, b, c) seja combinação linear de u e v.

9. Escreva u como combinação linear dos polinômios $v = 2t^2 + 3t - 4$ e $w = t^2 - 2t - 3$, onde

   (a) $u = 3t^2 + 8t - 5$ (b) $u = 4t^2 - 6t - 1$

10. Escreva E como combinação linear de

    $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, onde

    (a) $E = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ (b) $E = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

11. Mostre que $(1, 1, 1)$, $(0, 1, 1)$ e $(0, 1, -1)$ geram $\mathbb{R}^3$, isto é, que qualquer vetor (a, b, c) é uma combinação linear dos vetores dados.

12. Mostre que os números complexos $w = 2 + 3i$ e $z = 1 - 2i$ geram o corpo complexo $\mathbb{C}$ como espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$.

13. Encontre um vetor em $\mathbb{R}^3$ que gere a intersecção de V e W onde V é o plano xy: $V = \{(a, b, 0)\}$ e W é o espaço gerado pelos vetores $(1, 2, 3)$ e $(1, -1, 1)$.

14. Determine quais das seguintes matrizes têm o mesmo espaço de linhas:

    $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 10 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$.

15. Sejam

$$u_1 = (1, 1, -1)\,, \quad u_2 = (2, 3, -1)\,, \quad u_3 = (3, 1, -5)$$

$$v_1 = (1, -1, -3)\,, \quad v_2 = (3, -2, -8)\,, \quad v_3 = (2, 1, -3)$$

Mostre que o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos u_i é o mesmo subespaço gerado pelos v_i.

16. Dê um sistema de geradores para cada um dos seguintes subespaços do $\mathbb{R}^3$:

    (a) $U = \{(x, y, z) \mid x - 2y = 0\}$
    (b) $V = \{(x, y, z) \mid x + y = 0 \text{ e } x - 2y = 0\}$
    (c) $W = \{(x, y, z) \mid x + 2y - 3z = 0\}$
    (d) $U \cap V$
    (e) $V + W$

17. Verifique se as seguintes matrizes geram o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$:
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$

18. Considere os seguintes vetores do $\mathbb{R}^3$: $(-1, 0, 1)$ e $(3, 4, -2)$. Determine um sistema de equações homogêneas para o qual o espaço solução seja exatamente o subespaço gerado por esses vetores.

19. Mostre que os dois conjuntos abaixo formados de funções contínuas reais definidas em $\mathbb{R}$ geram o mesmo subespaço vetorial de $C(\mathbb{R})$:

$$\{\mathrm{sen}^2 t, \cos^2 t, \mathrm{sen} t \cos t\} \quad \text{e} \quad \{1, \mathrm{sen} 2t, \cos 2t\}$$

20. Mostre que, para qualquer subespaço W de um espaço vetorial V, $W + W = W$.

21. Sejam U, V e W os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^3$: $U = \{(a, b, c) \mid a + b + c = 0\}$, $V = \{(a, b, c) \mid a = c\}$ e $W = \{(0, 0, c) \mid c \in \mathbb{R}\}$. Mostre que

    (a) $\mathbb{R}^3 = U + V$
    (b) $\mathbb{R}^3 = U + W$
    (c) $\mathbb{R}^3 = V + W$

    Quando a soma é direta?

22. Seja V o espaço vetorial de todas as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Seja U o subespaço das funções pares e W o subespaço das funções ímpares. Mostre que $V = U \oplus W$.

23. Seja V o espaço vetorial das matrizes quadradas $n \times n$ sobre um corpo K. Seja U o subespaço das matrizes triangulares superopres e W o subespaço das matrizes triangulares inferiores. Encontre $U + W$ e $U \cap W$.