Álgebra Linear - Prof.ª Cecilia Chirenti

Lista 5 - Bases e Dimensão

1. Determine se u e v são linearmente dependentes onde
   (a) $u = (1, 2, 3, 4)$ e $v = (4, 3, 2, 1)$
   (b) $u = (-1, 6, -12)$ e $v = (1/2, -3, 6)$
   (c) $u = (0, 1)$ e $v = (0, -3)$
   (d) $u = (1, 0, 0)$ e $v = (0, 0, -3)$
   (e) $u = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $v = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$
   (f) $u = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $v = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
   (g) $u = -t^3 + 1/2t^2 - 16$ e $v = 1/2t^3 - 1/4t^2 + 8$
   (h) $u = t^3 + 3t + 4$ e $v = t^3 + 4t + 3$

2. Determine se os seguintes vetores em $\mathbb{R}^4$ são linearmente dependentes ou independentes:
   (a) $(1, 3, -1, 4)$, $(3, 8, -5, 7)$, $(2, 9, 4, 23)$
   (b) $(1, -2, 4, 1)$, $(2, 1, 0, -3)$, $(3, -6, 1, 4)$

3. Mostre que
   (a) Os vetores $(1 - i, i)$ e $(2, -1 + i)$ em $\mathbb{C}^2$ são linearmente dependentes sobre o corpo complexo $\mathbb{C}$ mas são linearmente independentes sobre o corpo real $\mathbb{R}$.
   (b) Os vetores $(3 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$ e $(7, 1 + 2\sqrt{2})$ em $\mathbb{R}^2$ são linearmente dependentes sobre o corpo real $\mathbb{R}$ mas são linearmente independentes sobre o corpo racional $\mathbb{Q}$.

4. Suponha que u, v e w são vetores linearmente independentes. Mostre que
   (a) $u + v - 2w,\ u - v - w,\ u + w$ são linearmente independentes
   (b) $u + v - 3w,\ u + 3v - w,\ v + w$ são linearmente dependentes

5. Determine se cada um dos seguintes forma uma base de $\mathbb{R}^3$
   (a) $(1, 2, -1),\ (0, 3, 1)$
   (b) $(2, 4, -3),\ (0, 1, 1),\ (0, 1, -1)$
   (c) $(1, 5, -6),\ (2, 1, 8),\ (3, -1, 4),\ (2, 1, 1)$
   (d) $(1, 3, -4),\ (1, 4, -3),\ (2, 3, -11)$

6. Encontre uma base e a dimensão do subespaço W de $\mathbb{R}^4$ gerado por

   (a) $(1,4,-1,3),\ (2,1,-3,-1),\ (0,2,1,-5)$

   (b) $(1,-4,-2,1),\ (1,-3,-1,2),\ (3,-8,-2,7)$

7. Seja V o espaço das matrizes 2×2 sobre $\mathbb{R}$ e seja W o subespaço gerado por $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$. Encontre uma base e a dimensão de W.

8. Seja W o espaço gerado pelos polinômios $u = t^3 + 2t^2 - 2t + 1$, $v = t^3 + 3t^2 - t + 4$ e $w = 2t^3 + t^2 - 7t - 7$. Encontre uma base e a dimensão de W.

9. Encontre uma base e a dimensão do espaço de soluções W de cada sistema homogêneo:

   (a) $\begin{cases} x + 3y + 2z = 0 \\ x + 5y + z = 0 \\ 3x + 5y + 8z = 0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x - 2y + 7z = 0 \\ 2x + 3y - 2z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x + 4y + 2z = 0 \\ 2x + y + 5z = 0 \end{cases}$

10. Sejam U e W subespaços do $\mathbb{R}^3$ para os quais $\dim U = 1$, $\dim W = 2$ e $U \not\subset W$. Mostre que $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$.

11. Seja U o subespaço do $\mathbb{R}^5$ gerado por

    $\{(1,3,-3,-1,-4),\ (1,4,-1,-2,-2),\ (2,9,0,-5,-2)\}$

    e seja W o subespaço gerado por

    $\{(1,6,2,-2,3),\ (2,8,-1,-6,-5),\ (1,3,-1,-5,-6)\}$.

    Encontre $\dim(U+W)$ e $\dim(U\cap W)$.

12. No espaço vetorial V dos polinômios em t de grau $n \leq 3$, considere a seguinte base: $\{1, 1-t, (1-t^2), (1-t)^3\}$. Encontre o vetor coordenadas de $v \in V$ em relação à base dada se

    (a) $v = 2 - 3t + t^2 + 2t^3$

    (b) $v = 3 - 2t - t^2$

    (c) $v = a + bt + ct^2 + dt^3$

13. No espaço vetorial W das matrizes simétricas 2×2 sobre $\mathbb{R}$, considere a seguinte base: $\left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\right\}$. Encontre o vetor coordenada da matriz $A \in W$ em relação à base acima se

    (a) $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$

    (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

14. Considere as duas bases do $\mathbb{R}^3$ $\{e_1 = (1,1,1),\ e_2 = (0,2,3),\ e_3 = (0,2,-1)\}$ e $\{f_1 = (1,1,0),\ e_2 = (1,-1,0),\ e_3 = (0,0,1)\}$.

(a) Encontre o vetor coordenadas de $v = (3, 5, -2)$ em relação a cada base $[v]_e$ e $[v]_f$.

(b) Encontre a matriz P cujas linhas são respectivamente os vetores coordenadas dos e_i em relação à base $\{f_1, f_2, f_3\}$.

(c) Verifique que $[v]_e P = [v]_f$.

15. Encontre o posto de cada matriz

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & -3 & 6 & 13 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 5 \\ 5 & 8 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & -2 & 0 & -4 \\ 3 & 8 & -7 & -2 & -11 \\ 2 & 1 & -9 & -10 & -3 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -7 \\ -6 & 1 \\ 5 & -8 \end{pmatrix}$