Álgebra Linear - Prof.ª Cecilia Chirenti

Lista 6 - Transformações Lineares

1. Quais das seguintes aplicações de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$ são operadores lineares? Justifique.

   (a) $F_1(x, y, z) = (x - y, x + y, 0)$
   (b) $F_2(x, y, z) = (2x - y + z, 0, 0)$
   (c) $F_3(x, y, z) = (x, x, x)$
   (d) $F_4(x, y, z) = (2x^2 + 3y, x, z)$

2. Seja $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear assim definidona base canônica: $F(1, 0, 0) = (2, 3, 1)$, $F(0, 1, 0) = (5, 2, 7)$ e $F(0, 0, 1) = (-2, 0, 7)$. Determine $F(x, y, z)$, onde (x, y, z) é um vetor genérico do $\mathbb{R}^3$ e mostre que F é um operador linear.

3. Considere o espaço vetorial $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$ e seja $F: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $F(z) = \bar{z}$, $\forall z \in \mathbb{C}$. Mostre que F é um operador linear. Se tivéssemos considerado o espaço vetorial $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{C}$, F ainda seria um operador linear? Justifique.

4. Verifique se são operadores lineares no espaço $P_n(\mathbb{R})$:

   (a) $F: P_n(\mathbb{R}) \to P_n(\mathbb{R})$ tal que $F(f(t)) = tf'(t)$, $\forall f(t) \in P_n(\mathbb{R})$.
   (b) $F: P_n(\mathbb{R}) \to P_n(\mathbb{R})$ tal que $F(f(t)) = f'(t) + t^2 f''(t)$, $\forall f(t) \in P_n(\mathbb{R})$.

5. Determine uma base e a dimensão do núcleo e da imagem para cada uma das transformações lineares abaixo:

   (a) $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $F(x, y, z) = x + y - z$.
   (b) $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $F(x, y) = (2x, x + y)$.
   (c) $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dada por $F(x, y, z) = (x - y - z, x + y + z, 2x - y + z, -y)$.
   (d) $F: P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ dada por $F(f(t)) = t^2 f''(t)$.
   (e) $F: M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ dada por $F(X) = MX + X$, onde $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   (f) $F: M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ dada por $F(X) = MX - XM$, onde $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Suponha que $F: V \to U$ é linear. Mostre que, para qualquer $v \in V$, $F(-v) = -F(v)$.

7. Determine um operador linear $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja imagem é gerada por $(2, 1, 1)$ e $(1, -1, 2)$.

8. Determine um operador linear do $\mathbb{R}^4$ cujo núcleo é gerado por $(1, 1, 0, 0)$ e $(0, 0, 1, 0)$.

9. Determine um operador linear do $\mathbb{R}^3$ cujo núcleo tenha dimensão 1.

10. Seja $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $F(1,0,0) = (1,1,0)$, $F(0,1,0) = (1,1,2)$ e $F(0,0,1) = (0,0,2)$. Determine uma base para cada um dos seguintes subespaços vetoriais: $\ker(F)$, $\mathrm{Im}(F)$, $\ker(F) \cap \mathrm{Im}(F)$, e $\ker(F) + \mathrm{Im}(F)$.

11. Mostre que cada um dos operadores lineares do $\mathbb{R}^3$ a seguir é inversível e determine o isomorfismo inverso em cada caso.

    (a) $F(x,y,z) = (x - 3y - 2z, y - 4z, z)$

    (b) $F(x,y,z) = (x, x - y, 2x + y - z)$

12. Considere o operador linear F do $\mathbb{R}^3$ definido por $F(1,0,0) = (1,1,1)$, $F(0,1,0) = (1,0,1)$ e $F(0,1,2) = (0,0,4)$. F é inversível? Se for, determine o isomorfismo inverso.

13. Sejam $u, v \in \mathbb{R}^2$ vetores tais que $\{u, v\}$ é uma base do $\mathbb{R}^2$. Sendo $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ uma transformação linear, mostre que uma das seguites alternativas se verifica:

    (a) $\{F(u), F(v)\}$ é ℓi. (b) $\dim\ \mathrm{Im}(F) = 1$ (c) $\mathrm{Im}(F) = \{o\}$

14. Sejam U e V subespaços do espaço W tais que $W = U \oplus V$. Considere o espaço vetorial $U \times V$, cuja adição é $(u_1, v_1) + (u_2, v_2) = (u_1 + u_2, v_1 + v_2)$ e cuja multiplicação por escalares é $\alpha(u,v) = (\alpha u, \alpha v)$. Mostre que é um ismorfismo de $U \times V$ em W a aplicação assim definida: $F(u,v) = u + v$.

15. Suponha $V = U \oplus W$. Sejam E_1 e E_2 os operadores lineares em V definidos por $E_1(v) = u$, $E_2(v) = w$, onde $v = u + w,\ u \in U,\ w \in W$. Mostre que

    (a) $E_1^2 = E_1$ e $E_2^2 = E_2$, isto é, E_1 e E_2 são projeções.

    (b) $E_1 + E_2 = I$, a transformação identidade.

    (c) $E_1 E_2 = 0$ e $E_2 E_1 = 0$.

16. Sejam E_1 e E_2 os operadores lineares em V do problema anterior. Mostre que $V = \mathrm{Im}(E_1) \oplus \mathrm{Im}(E_2)$.

17. Mostre que se os peradores S e T são inversíveis, então ST é inversível e $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$.

18. Seja V de dimensão finita e seja T um operador linear em V tal que $\mathrm{posto}(T^2) = \mathrm{posto}(T)$. Mostre que $\ker(T) = \mathrm{Im}(T) = \{0\}$.