Funções Complexas e Transformadas Integrais

Prof.ª Cecilia Chirenti

Lista 3 - Integrais de linha (revisão de FVV) e teorema de Cauchy

1. Calcule $\int_{(1,1)}^{(4,2)}(x+y)dx+(y-x)dy$ ao longo
   (a) da parábola $y^2 = x$
   (b) da linha reta que une os dois pontos
   (c) das linhas retas de $(1,1)$ a $(1,2)$ e depois a $(4,2)$
   (d) da curva $x = 2t^2 + t + 1$, $y = t^2 + 1$
2. Calcule $\oint(2x-y+4)dx+(5y+3x-6)dy$ ao redor de
   (a) um triângulo no plano xy com vértices em $(0,0)$, $(3,0)$ e $(3,2)$ percorrido na direção anti-horária
   (b) um círculo de raio 4 com centro em $(0,0)$
3. Verifique o teorema de Green no plano para $\oint_C(x^2-xy^3)dx+(y^2-2xy)dy$, onde C é um quadrado com vértices em $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,2)$ e $(0,2)$.
4. Seja C uma curva simples fechada qualquer limitando uma região tendo área A. Prove que se a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 e b_3 são contantes, então

   $$\oint_C (a_1x+a_2y+a_3)dx+(b_1x+b_2y+b_3)dy = (b_1-a_2)A$$

   Sob que condições a integral de linha será zero?
5. Encontre a área limitada pela hipociclóide $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$. Dica: use as equações paramétricas $x=\cos^3 t$, $y=\operatorname{sen}^3 t$, $0\le t\le 2\pi$.
6. Se $x = r\cos\theta$ e $y = \operatorname{sen}\theta$, prove que

   $$\frac{1}{2}\oint xdy - ydx = \frac{1}{2}\int r^2 d\theta$$

   e interprete.
7. Verifique o teorema de Green no plano para $\oint_C(x^3-x^2y)dx+xy^2dy$, onde C é a fronteira da região limitada pelos círculos $x^2+y^2=4$ e $x^2+y^2=16$.
8. Prove que $\int_{(1,0)}^{(2,1)}(2xy-y^4+3)dx+(x^2-4xy^3)dy$ é independente do caminho ligando $(1,0)$ a $(2,1)$. Calcule a integral.

9. Calcule $\int_{1-2i}^{3+i}(2z+3)dz$

   (a) ao longo do caminho $x = 2t+1$, $y = 4t^2 - t - 2$, onde $0 \leq t \leq 1$.

   (b) ao longo da linha reta ligando $1-2i$ e $3+i$

   (c) ao longo das linhas retas de $1-2i$ a $1+i$ e a $3+i$

10. Calcule $\int_C (z^2 - z + 2)dz$, onde C é a metade superior do círculo $|z| = 1$ percorrido no sentido positivo.

11. Calcule

$$\oint_C \frac{z\,dz}{2z-5},$$

onde C é o círculo

   (a) $|z| = 2$

   (b) $|z-3| = 2$

12. Calcule

$$\oint_C \frac{z^2 dz}{(z+2)(z-1)},$$

onde C é

   (a) um quadrado com vértices em $-1-i$, $-1+i$, $-3+i$ e $-3-i$

   (b) o círculo $|z+1| = 3$

   (c) o círculo $|z| = \sqrt{2}$

13. Calcule

   (a) $\displaystyle\oint_C \frac{\cos \pi z}{z-1}$

   (b) $\displaystyle\oint_C \frac{e^z + z}{(z-1)^4}$

onde C é qualquer curva simples fechada envolvendo $z = 1$.