Nome:____

Fundamentos da Relatividade Geral

Prova 2 - 12/8/2015

1. Mostre que as equações de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R^{\lambda}{}_{\lambda} = -8\pi T_{\mu\nu}$$

podem ser reduzidas a $R_{\mu\nu} = 0$ no caso sem fontes. Para as equações modificadas pela presença de uma constante cosmológica, generalize o resultado anterior. Nesse caso, o espaço-tempo de Minkowski (espaço-tempo plano) ainda é uma solução de vácuo?

2. Um observador cai radialmente em um buraco negro de massa M. O movimento do observador começa a partir do repouso em $r = 10M$. Quanto tempo passa no relógio do observador até ele atingir a singularidade?

3. Considere a métrica

$$ds^2 = dt^2 - [1 + f(t-z)]dx^2 - [1 - f(t-z)]dy^2 - dz^2 \,.$$

   (a) Dê uma interpretação física para a métrica dada.
   (b) Usando a escolha $f(t-z) = a \exp[-(t-z)^2/\sigma^2]$, desenhe um diagrama de espaço-tempo com $x = y = 0$. Mostre a região em que $f(t-z)$ é maior que $a/2$.
   (c) Desenhe a linha de mundo de uma partícula teste na origem.

4. As equações que descrevem um universo homogêneo e isotrópico são

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = -\frac{k}{R^2} + \frac{\Lambda}{3} + \frac{8\pi\rho}{3} \quad \text{e} \quad 2\frac{\ddot{R}}{R} = -\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 - \frac{k}{R^2} + \Lambda - 8\pi p \,.$$

Considere um universo é homogêneo, isotrópico que contém apena poeira sem pressão e "energia do vácuo". Mostre que existe uma solução estática para a métrica e que esta solução é instável (esse modelo cosmológico é denominado "Universo de Einstein").