Álgebra Linear Avançada II

Prof.ª Cecilia Chirenti

Lista 4 - Tensores

1. (a) Um vetor A^i possui componentes $\dot{x}, \dot{y}$ ($\cdot = \frac{d}{dt}$) em coordenadas Cartesianas. Quais são as suas componentes em coordenadas polares?
   (b) Um vetor B^i possui componentes $\ddot{x}, \ddot{y}$ em coordenadas Cartesianas. Mostre que as suas componentes em coordenadas polares são $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2, \ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}/r$.

2. A transformação de coordenadas linear $x^{i'} = a^{i'}_i x^i$ com inversa $x^i = b^i_{i'} x^{i'}$ é chamada ortogonal se $b^i_{i'} = a^{i'}_i$. Mostre que para esse tipo de transformação não há diferença entre covariância e contravariância.

3. Use a regra do quociente para mostre que o delta de Kronecker δ^i_j é um tensor.

4. Se C_{ij} é simétrico e $C_{ij}A^iA^j$ é um escalar para um vetor arbtirário A^i, mostre que C_{ij} é um tensor.

5. (a) Se $C_{ij}A^iA^j$ é um escalar para um vetor arbtirário A^i, mostre que $C_{ij} + C_{ji}$ é um tensor.
   (b) Se $C_{ij}A^iB^j$ é um escalar para dois vetores arbtirários A^i, B^i, mostre que C_{ij} é um tensor.

6. Mostre que, para todo vetor A_i, a expressão $A_{i,j} - A_{j,i}$ ($_{,i} = \frac{\partial}{\partial x^i}$) é um tensor, mesmo sob transformações não-lineares. De maneira semelhante, mostre que, para todo tensor anti-simétrico E_{ij} a expressão $E_{ij,k} + E_{jk,i} + E_{ki,j}$ é um tensor.

7. Se os coeficientes a_{ij} são constantes e simétricos, mostre que $(a_{ij}A^iA^j)_{,k} = 2a_{ij}A^iA^j_{,k}$.

8. Para qualquer objeto A_{ij} podemos definir a "parte simétrica" $A_{(ij)} = \frac{1}{2}(A_{ij}+A_{ji})$ e a "parte anti-simétrica" $A_{[ij]} = \frac{1}{2}(A_{ij}-A_{ji})$. Evidentemente, $A_{ij} = A_{(ij)} + A_{[ij]}$. Definições análogas são feitas para B^{ij}. Se A_{ij} e B^{ij} são tensores, suas partes simétricas e anti-simétricas também são tensores. Mostre que
   (a) $A_{(ij)}B^{ij} = A_{(ij)}B^{(ij)} = A_{ij}B^{(ij)}$
   (b) $A_{[ij]}B^{ij} = A_{[ij]}B^{[ij]} = A_{ij}B^{[ij]}$
   (c) $A_{(ij)}B^{[ij]} = 0$

9. Se $g_{ij} = 0$ para $i \neq j$, mostre que $g^{ij} = 0$ para $i \neq j$ e $g^{ii} = 1/g_{ii}$.

10. Considere a geometria na superfície de uma esfera bidimensional de raio a dada por $dS^2 = a^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2)$ e um vetor v com componentes $v^i = (0,1)$. Calcule as quatro componentes da derivada covariante $v^i_{;j}$ e depois calcule as duas quantidades $v^\theta_{;\phi\theta}$ e $v^\theta_{;\theta\phi}$. As derivadas covariantes comutam?

11. Mostre explicitamente que a derivada covariante da métrica se anula.

12. Mostre que a operação de contração de índices é independente do sistema de coordenadas escolhido, ou seja, mostre que as componentes de $w_i = t_{ij}^{\ \ j}$ se tranformam corretamente.

13. Sejam $||A_{ij}||$ e $||A_{i'j'}||$ os determinantes de um tensor A_{ij} nos sistemas de coordenadas x^i e $x^{i'}$, respectivamente. Mostre que $||A_{i'j'}|| = ||A_{ij}||p^{-2}$, onde $p = ||p_i^{i'}||$ é o Jacobiano da transformação $x^i \to x^{i'}$.

14. Seja a_p^i o p-ésimo elemento da i-ésima coluna de uma matriz 4×4 com determinante igual a a. Sabe-se da teoria de determinantes que $e_{ijkl}a_p^i a_q^j a_r^k a_s^l = e_{pqrs}a$, onde os e_{ijkl} denotam os símbolos de permutação que adquirem o valor $+1$, -1 ou 0, se i, j, k, l são uma permutação par, ímpar ou não formam uma permutação de 1,2,3,4. Mostre que, num espaço 4-dimensional, as componentes $\epsilon_{ijkl} = |g|^{1/2}e_{ijkl}$ (onde $|g|$ é o determinante do tensor métrico) se transformam como um tensor covariante - o tensor de permutação - sob qualquer grupo de transformações com jacobianos positivos.