Geometria Diferencial I - Prof.ª Cecilia Chirenti

Exercício para nota 4

Capítulo 4 de Elementary Differential Geometry, B. O'Neill

1. Exercício 4, seção 4.6, página 181.

   (a) Mostre que toda curva α no $\mathbb{R}^2$ que não passa pela origem possui uma reparametrização (que preserva a orientação) na forma polar

   $\alpha(t) = (r(t) cos\vartheta(t), r(t)\text{sen } \vartheta(t))$

   Dica: Veja o exercício 12 da seção 2.1 para a definição da função ângulo.

   Se a curva $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^2 - 0$ é fechada, prove:

   (b) $\text{wind}(\alpha) = \frac{\vartheta(b)-\vartheta(a)}{2\pi}$ é um inteiro.
   Este inteiro, chamado o *índice de α ao redor de 0*, representa o número total de voltas que α dá ao redor da origem na direção anti-horária. (Note que $\text{wind}(\alpha) = \text{wind}(\alpha/||\alpha||)$.)

   (c) Se ψ é a 1-forma dada por $\psi = \frac{udv-vdu}{u^2+v^2}$, então $\text{wind}(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_\alpha \psi$.

   (d) Se $\alpha = (f, g)$, então $\text{wind}(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_a^b \frac{fg'-gf'}{f^2+g^2}dt = \frac{1}{2\pi}\int_a^b \frac{\det(\alpha(t),\alpha'(t))}{\alpha(t)\cdot\alpha(t)}dt$.
   (Determinante da matriz cujas colunas são $\alpha(t)$ e $\alpha'(t)$.)

2. Exercício 5, seção 4.6, página 181-182

   (Continuação do ex. anterior, usando o computador.) Para um ponto $p \in \mathbb{R}^2$ que não pertence a uma curva fechada α, o índice de α ao redor de p é definido como $\text{wind}(\alpha - p)$.

   (a) Dada uma curva fechada α no $\mathbb{R}^2$ e um ponto p que não pertence a α, escreva comandos que retornem o índice de α ao redor de p. (Dica: Use qualquer uma das integrais do item (d) do exercício acima.)

   (b) Em cada caso, faça o gráfico da curva α (observando sua orientação) e estime os índices ao redor dos pontos p indicados. A seguir, calcule estes números, usando a integral. (A integral numérica é eficiente neste caso, porque já se sabe que o resultado é número inteiro.)

      i. lemniscata, $\alpha(t) = (2\text{sen } t, \text{sen } 2t)$; $p = (1, 0), (0, 1), (-1, 0)$
      ii. limaçon, $\beta(t) = (3\text{sen } t + 1)(\cos t, \text{sen } t)$; $p = (0, 1), (0, 3), (0, 5)$