MAT-151 - Laboratório de Matemática
O Princípio de indução finita

Eduardo do N. Marcos e Iole de F. Druck

1 Introdução

Um dos métodos bastante usados nas demonstrações de afirmações sobre os números naturais são os chamados princípios de indução finita, fraco e forte, os quais são dois princípios equivalentes.

Esses princípios serão muito úteis para provar afirmações sobre os números naturais do tipo. "Para todo $n \in \mathbb{N}$ vale $P(n)$" onde $P(n)$ é uma proposição, isto é uma propriedade enunciada sobre os números naturais.

Uma segunda aplicação desse princípio é na definição de seqüencias indexadas nos números naturais que diremos serem definidas indutivamente, devido a regras de formação que essas seqüencias satisfazem.

Não pretendemos que estas notas sejam completas , mas acreditamos que o aluno que ainda não conheça o princípio de indução ao final das notas estará mais à vontade para aplicá-lo.

2 Os axiomas de Peano

O conjunto dos números naturais pode ser descrito de maneira axiomática usando-se os seguintes axiomas:

Existe um conjunto $\mathbb{N}$, cujos elementos são chamados números naturais e que satisfaz os seguintes axiomas:

1. Existe um elemento distinguido em $\mathbb{N}$ que denotaremos por 0
2. Para cada n em $\mathbb{N}$ existe um outro elemento $n+1$ em $\mathbb{N}$. (Chamado de sucessor de n).

3. 0 não é sucessor de nenhum n em $\mathbb{N}$.

4. $n+1=m+1 \Rightarrow n=m$, para quaisquer n e m em $\mathbb{N}$.

5. Seja $S \subset \mathbb{N}$ tal que

   (a) $0 \in S$

   (b) $n \in S \Rightarrow n+1 \in S$.

   Então $S = \mathbb{N}$.

O 5º axioma acima é o que chamamos de **Princípio de indução finita fraco**. É nele que estamos interessados no momento.

A partir desses axiomas poderíamos desenvolver praticamente toda a aritmética e a partir dai os números reais, etc.. , o que será visto no seu curso de licenciatura ao longo do tempo.

Talvez a seguinte afirmação queira dizer exatamente isso.

"Deus criou os naturais o resto é obra dos homens". (Kronecker).

Uma formulação equivalente do princípio de indução finita (forma fraca) é a seguinte.

Para cada natural n seja $P(n)$ uma propriedade a respeito de n. Tal que

1. $P(0)$ é verdadeira

2. Se a propriedade P valer para um natural k, então ela vale para $k+1$.

   Então teremos que $P(n)$ é verdadeira para todo natural n.

Exercício: Na parte deste curso onde estudamos combinatória muitas fórmulas podem ser provadas usando o princípio de indução. Use este princípio e prove algumas daquelas fórmulas.

Algumas propriedades que falam dos números inteiros só fazem sentido a partir de um determinado número. Por exemplo dizer que " A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono de n lados é sempre $(n-2).180^0$" não faz sentido para $n = 0, 1$ e 2 , pois o polígono com o menor número de lados é o triângulo que tem 3 lados. Por isso enunciamos o seguinte princípio que é equivalente ao princípio de indução.

Princípio de Indução fraca 2ª forma. Seja P uma propriedade enunciada para números inteiros. Assuma que:

a) $P(r)$ é verdadeira, para algum r em $\mathbb{N}$

b) $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, para todo $k \geq r$, k em $\mathbb{N}$.

Então a vale $P(n)$ para todo inteiro n maior ou igual a r.

Exemplo: (E.E. Moise) (Torre de Hanoi). Considere o seguinte jogo ou problema. São dados 3 pinos, como aqueles usados no jôgo de malhas.

No primeiro pino está uma pilha de discos de madeira cujo raio vai diminuindo ordenadamente de baixo para cima.

Os discos são numerados 1, 2, 3, ... ,n, de cima para baixo; na figura $n = 5$.

Um movimento permitido no jogo consiste em tomar o disco superior de um pino e colocá-lo em um dos outros pinos, sujeito à condição de que não devemos em nenhum momento, colocar um disco sobre outro menor que ele.

Começamos com todos os discos no pino A. A finalidade do jogo é colocar todos os discos em um dos outros pinos B ou C.

Proposição 1 *Para todo $n \geq 1$ o problema das torres de Hanoi tem solução. Ou seja, é possível, através dos movimentos permitidos, passar todos os n pinos de 1 pino dado para algum dos outros dois.*

Prova: a) P(1) é verdadeira. Isto é: se só tivermos um disco em A então o problema tem solução. Basta colocar esse pino em B ou C.

b) Para cada k, $P(k) \Rightarrow P(k+1)$.

Então suponha dado um problema de Hanoi com $(k+1)$-discos e vamos assumir que o problema com k discos tem solução. Portanto a pilha dos discos $1, 2, ..., k$ pode ser removida, por exemplo, para o pino C através dos movimentos permitidos. Supomos isso feito.

Mova então o disco $(k+1)$ do pino A para o pino B. Por $P(k)$ sabemos que os discos $1, ..., k$ podem ser removidos do pino C para o pino B, já que o disco que está em B é o maior de todos e portanto não impede nenhuma jogada. Então o jogo está completo. Logo o princípio de indução nos permitiu demonstrar o que queríamos, ou seja tendo podido mover todos os k pinos indicamos como mover k+1 pinos.

2º Exemplo: Vamos demostrar por indução que a seguinte fórmula é verdadeira

$$1 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Prova: Veja que temos uma igualdade que faz uma afirmação dependente de n que queremos demonstrar e vamos fazê-lo usando o princípio de indução (fraca).

a) P(1) é verdadeira pois $1 = \frac{1(2)(3)}{6}$

b) Vamos agora mostrar que $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ (k maior ou igual a 1).

Assumimos que $1 + 2^2 + ... + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ e queremos concluir daí que

(*) $$1 + 2^2 + ... + k^2 + (k-1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}$$

Temos, usando a hipótese de indução no lado esquerdo de *

$$1 + 2^2 + ... + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 =$$

$$\frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)(k(2k+1) + 6k + 6)}{6} =$$

$$\frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}$$

e a validade da fórmula está demonstrada. □

Agora enunciaremos uma outra forma de 5º axioma de PEANO que é o chamado princípio de indução na forma forte.

Esse princípio será demonstrado usando-se os axiomas de Peano. Também podemos enunciar os axiomas de Peano trocando-se o 5º axioma por esse princípio. Nesse caso o que é agora o axioma 5 seria um teorema.

Princípio de indução (forma forte).

Seja $S \subset \mathbb{N}$ tal que

a') $0 \in S$

b') $\forall\, k \in S,\ \{0, 1, ..., k\} \subset S \Rightarrow k + 1 \in S$.

Então $S = \mathbb{N}$.

Vamos agora demonstrar esse princípio usando a forma fraca.

Assumimos como hipótese que $S \subset \mathbb{N}$ satisfaz a') e b') e queremos concluir daí que $S = \mathbb{N}$. Ou seja falta provar sómente que $\mathbb{N} \subset S$

Isso segue facilmente se demonstrarmos que a propriedade $P(n)$ que é:

Para todo $n \in \mathbb{N}$ o conjunto $\{0, 1, 2, ..., n\}$ está contido em S.

Vejamos que a validade do P.I.F., fraco, implica que esta última propriedade vale, para todo natural n.

a) Ora $0 \in S$, por a'),pois $\{o\} \subset \mathbb{N}$ e vale $P(0)$.

b) Assuma que vale $P(k)$. Então vale $P(k + 1)$ pois P(k) significa que $\{0, 1, 2, ..., k\}$ está contido em S. E como por b') sempre que isso acontece então $k + 1 \in S$ teremos que $\{0, 1, 2, ..., k, k + 1\}$ está contido em S. Portanto vale P(k+1).

A demonstração está terminada.

Nós não faremos nessas notas a demonstração do fato verdadeiro:

P1+P2+P3+P4+P5 (Forte) $\Rightarrow$ P5 (Fraca), (Tente pensar numa prova).

Notas históricas: Embora os gregos usassem certos argumentos iterativos em cálculos geométricos e o princípio de redução ao absurdo, a indução matemática foi usada pela primeira vez, de forma explicita por Maurolycur por volta de 1550. Pascal usou um argumento de indução em 1654 para verificar a seguinte fórmula que usamos no nosso curso de combinatória.

$$\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \binom{r+2}{r} + ... + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1}$$

O termo indução foi usado pela primeira vez 200 anos mais tarde por De Morgan.

Lista de Exercícios

1. Prove que seguintes desigualdades são verdadeiras.

   a) $n < 2^n$

   b) $2^n < n!$ se $n \geq 4$

   c) $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ para todo $n \geq 2$ e todo $x \geq 1$.

2. Demonstre a validade das seguinte fórmulas

a) $1 + 2 + 3 + ... + k = \frac{1}{2}(k(k+1))$

b) $1 + a + a^2 + ... + a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$ se $a \neq 1$

c) $(1 + 2 + ... + n)^2 = 1^3 + 2^3 + ... + n^3$.

d) $1.1! + 2.2! + ... + n.n! = (n+1)! - 1$

3. Numa ilha existem uma quantidade muito grande de pássaros que são infinitamente inteligentes e cada um sabe da inteligência dos outros. Esses pássaros são muito vaidosos e tem 1 pena colorida no seu rabo que não conseguem enchergar. Se eles descobrem que eles perderam essa pena eles suicidam-se. Eles se encontram só uma vez por dia. Um dia ao encontrarem-se eles são informados que pelo menos um deles perdeu essa pena. Passados n dias pelo menos um pássaro se suicida. Pergunta-se:

a) Quantos pássaros suicidam-se nesse dia.

b) Quantos pássaros perderam sua pena.

(Sugestão: Comece com n= 1,2,3 depois conjecture algo e prove por indução).

4. Numa certa criação de coelhos o número de coelhos $A(n)$ após n meses obedece a seguinte lei:

$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$ sabe-se que

$a_1 = 3$ e $a_2 = 7$. Mostre que

$a_n = 2^{n+1} - 1$ para todo $n \geq 1$.

5. Numa certa população de gatos o número de gatos em um ano é igual à soma do número de gatos nos dois anos prévios. Sabe-se que no primeiro ano havia um gato e no segundo dois. Mostre que o número de gatos no n-esimo ano é dado pela fórmula

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)^{n+1}\right].$$

6. O que está errado na seguinte demonstração.

   Proposição: Todo conjunto finito não vazio tem 1 elemento. **Prova** 1) Vale P(1)

   2) Assuma que vale $P(n)$ e seja $A = \{x_1, ..., x_n, x_{n+1}\}$ então $x_1 = x_2 = ... = x_n$ e $x_2 = x_3 = ... = x_n = x_{n+1}$ logo $x_1 = x_2 = ... = x_{n+1}$ e vale $P(n+1)$. □

7. O que está errado no seguinte argumento

   Proposição: Se $a \neq 0$ então $a^n = 1$ para todo n natural.

   Prova: (Indução) P(0): $a^0 = 1$ vale sempre assuma $a^n = 1$ e então $a^{n+1} = a^n.a.\frac{a^{n-1}}{a^{n-1}} = \frac{a^n a^n}{a^{n-1}} = \frac{1.1}{1} = 1$. □

8. Seja D uma regra que associa a cada polinômio em $R[x]$ um outro polinômio com as seguintes propriedades

   1) $D(kf) = kD(f)$

   2) $D(fg) = fD(g) + gDf$

   sabendo-se que $D(1) = 0$ e $D(x) = 1$.

   Encontre uma fórmula para $D(x^n)$ para $n \geq 1$, demonstre que sua fórmula é verdadeira.

9. Prove que $x + y$ divide $x^{2n+1} + y^{2n+1}$ mas $(x+y)^2$ não divide.

10. (a) Mostre que se para um dado natural n vale que $n^2 + n$ é impar então $(n+1)^2 + (n+1)$ também é impar.

    (b) Vale que $n^2 + n$ é impar para algum natural n?

11. Mostre que a fórmula

    $1 + 2 + 3 + \cdots + n = 1/2(n(n+1)) + (n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-1000)$ vale para todo número natural menor ou igual a 1000, mas não vale para 1001.

12. Prove que todo número natural, não primo, pode ser escrito como um produto de fatores primos.

13. Seu professor definirá em classe o que é conjunto discreto.

Nós indicaremos uma demonstração "errada" de que o conjunto dos números racionais é discreto. Pergunta-se qual é o erro da demonstração?

Demonstração: Os racionais são enumeráveis, escolha uma enumeração. $\mathbf{Q} = \{r_0, \cdots, r_n, \cdots\}$.

O conjunto $\{\}$ é discreto, logo vale $P(0)$.

Agora assuma que $\{r_0, \cdots, r_n\}$ é discreto, não é dificil provar que $\{r_0, \cdots, r_{n+1}\}$ é discreto.

Donde por indução concluimos o que queríamos.