

**MAT1513 – Laboratório de Matemática – 2008**

**Lista suplementar de questões envolvendo Lógica**

1) Em cada caso abaixo, justifique o porque de estar correto ou incorreto dizer que a tese decorre logicamente das hipóteses.

- a) Hipóteses: - Todo homem bem sucedido usa terno da marca TERNOX.  
- Pedro usa terno da marca TERNOX.  
Tese: - Pedro é bem sucedido.
- b) Hipóteses: - As mulheres adoram os homens que usam ternos da marca TERNOX.  
- Pedro usa ternos da marca TERNOX.  
Tese: As mulheres adoram Pedro.
- c) Hipóteses: - As mulheres adoram os homens que usam ternos da marca TERNOX.  
- As mulheres adoram Pedro.  
Tese: - Pedro usa terno da marca TERNOX.
- d) Hipóteses: - Todo homem bem sucedido usa terno da marca TERNOX.  
- Pedro não é bem sucedido.  
Tese: - Pedro usa terno da marca TERNOX.

2) Para cada afirmação abaixo encontre outra que seja sua negação lógica. Justifique sua resposta.

- a) Para todo número real  $x$  existe número real  $y$  tal que  $f(x) = y$ .  
Pergunta: o que a frase a) e a sua negação afirmam sobre a função  $f$ ?
- b) Para todo número real  $x$  existe número real  $y$  tal que  $f(x) = y$  e  $g(y) = x$ .  
Pergunta: qual o significado da afirmação b) e de sua negação?
- c) Para todo brasileiro existe um chinês que tem a mesma idade e a mesma profissão ou, pelo menos, o mesmo grau de instrução.
- d) Existe um homem careca que é cabeleireiro ou confecciona perucas.
- e) Existe um brasileiro que é mais rico que todos os demais brasileiros e também é o mais fiscalizado pela Receita Federal.

3) Justifique por quê as afirmações  $Q$  dos itens abaixo não são as negações lógicas das afirmações  $P$ , escreva qual é a negação de  $P$ , justificando, e escreva afirmações logicamente equivalentes às afirmações  $P$  que não sejam idênticas a elas.

- a)  $P$  : “Dada uma função de variável real qualquer, se ela não for trigonométrica então não é periódica”.  
 $Q$  : “Para uma função de variável real arbitrária, se ela for trigonométrica então é periódica.”
- b)  $P$  : “Dadas duas retas quaisquer no espaço, se elas não se cruzam, então são paralelas”.  
 $Q$  : “Dadas duas retas quaisquer no espaço se elas se cruzam então não são paralelas.”
- c)  $P$  : “Para todo  $x$  e todo  $y$  números reais, se  $x = y$  então  $3x + 5 = 3y + 5$ ”.  
 $Q$  : “Existem  $x$  e  $y$  números reais tais que, se  $x = y$  então  $3x + 5 = 3y + 5$ ”.

### A Demonstração por absurdo

Já vimos que se as hipóteses são verdadeiras, e o raciocínio correto, só podemos chegar a uma tese que é verdadeira. A demonstração por absurdo consiste no seguinte: você quer provar que uma hipótese  $H$  é falsa. Então você faz assim: usando  $H$  e outras hipóteses verdadeiras você chega a uma tese que é falsa. Aí você pensa: se todas as hipóteses fossem verdadeiras a tese teria que ser verdadeira. Como a tese não é verdadeira tem uma hipótese que é falsa. Qual é esta hipótese? Só pode ser  $H$  pois as outras hipóteses você sabia que eram verdadeiras! Você acaba de provar que  $H$  é falsa! É melhor reler isto, bem devagar e ter certeza que entendeu o raciocínio.

*Exemplo:* Prove que não existe  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $7\text{sen}x = 2\cos 2x$  e  $\text{sen}x < 0$ .

*Demonstração:* Vamos fazer uma demonstração por absurdo.

Suponhamos que exista  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $7\text{sen}x = 2\cos 2x$  e  $\text{sen}x < 0$

Então temos

$7\text{sen}x = 2\cos 2x = 2(\cos^2 x - \text{sen}^2 x) = 2(1 - 2\text{sen}^2 x) = 2 - 4\text{sen}^2 x$ .  
Isto é,  $7\text{sen}x = 2 - 4\text{sen}^2 x$ . Então  $\text{sen} x$  é raiz do polinômio  $4y^2 + 7y - 2$ .  
Mas as raízes deste polinômio são:

$$y = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 32}}{8} = 1/4 \text{ ou } -2$$

Como  $\text{sen} x$  é raiz deste polinômio e  $\text{sen}x < 0$  temos que ter  $\text{sen}x = -2$ , o que é absurdo!

O absurdo vem da hipótese: existe  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $7\text{sen}x = 2\cos 2x$  e  $\text{sen}x < 0$ . Logo, provamos que não existe  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $7\text{sen}x = 2\cos 2x$  e  $\text{sen}x < 0$ .

4) Faça uma demonstração por absurdo do seguinte:

não existe  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $6x^4 + 13x^2 + 6 = 0$ .

5) Cada item abaixo apresenta uma solução errada. Aponte o erro.

a) Dê a solução em  $\mathbb{R}$  da inequação  $x - 4 < \sqrt{x^2 + 1}$

*Solução:*  $x - 4 < \sqrt{x^2 + 1} \implies x^2 - 8x + 16 < x^2 + 1$

$$\implies -8x < -15 \implies x > \frac{15}{8}$$

O conjunto solução é  $\{x \in \mathbb{R} / x > \frac{15}{8}\}$

b) Mostre que se  $x \in \mathbb{R}$  e  $x > 2$  então  $\frac{\ln(x^2)}{x} \neq \ln(x)$

*Solução:* Vamos fazer a demonstração por absurdo. Suponhamos que para todo  $x \in \mathbb{R}$ , se  $x > 2$  então  $\frac{\ln(x^2)}{x} = \ln(x)$ .

Então teríamos que  $\frac{\ln(e^2)}{e} = \ln(e)$  (I)

Mas  $\ln(e^2) = 2$ ,  $\ln(e) = 1$  e  $\frac{2}{e} \neq 1$ .

Concluimos que  $\frac{\ln(e^2)}{e} \neq \ln(e)$  o que contradiz (I) acima. Chegamos a um absurdo e provamos o exercício.

## Provas por Absurdo

Extraído e adaptado de: "Geometry". Harold R. Jacobs. W.H. Freeman and Company, 1974.

1. Este jogo da velha incompleto apareceu uma vez numa anotação da IBM. Se assumimos que os dois jogadores sabem as regras e são bons jogadores, nós podemos provar o seguinte teorema:

	X	
	O	X
		O

Teorema: "O primeiro a jogar foi aquele que usa a marca X".

2. Um aluno está resolvendo um teste com 5 questões do tipo verdadeiro ou falso. Ele fez as seguintes constatações:

Fato 1. Se a resposta à primeira questão é verdade, então a resposta da próxima é falso.

Fato 2. A resposta à última questão deve ser igual à da primeira.

Fato 3. A resposta à segunda questão é verdade.

Teorema: "A resposta à última questão é falso".

3. Kátia, Eliane e Júlia estavam conversando sobre quantos amigos Alexandre tem. Kátia disse que Alexandre tem pelo menos 50 amigos. Eliane diz que certamente Alexandre não tem tantos amigos assim, enquanto que Júlia afirma que Alexandre deve ter pelo menos um amigo. Se apenas uma das três está dizendo a verdade, quantos amigos Alexandre tem? Explique o seu raciocínio.

4. Na estória "A princesa ou o tigre?" de Frank Stockton, um jovem príncipe é forçado a escolher entre duas salas, numa delas está uma princesa e na outra um tigre. Se ele escolher a sala onde está a princesa ele se casará com ela. Se ele escolher a outra sala, ele será forçado a enfrentar um tigre feroz. A escolha do jovem não é revelada na estória.

Muitos quebra-cabeças foram criados a partir deste tema. Num destes quebra-cabeças o rei colocou tabuletas sobre cada uma das portas das salas, dizendo ao príncipe que o que está escrito numa das tabuletas é verdade e o que está na outra é mentira. Em que sala está a princesa?

A
Nesta sala está a princesa e na outra está o tigre.

B
Em uma destas salas está a princesa e na outra está o tigre.

1. Considere as frases abaixo:

- I. Nenhum pescador é mentiroso.
- II. Algum pescador é mentiroso.
- III. Todo pescador não é mentiroso.
- IV. Todo pescador é mentiroso.
- V. Existe um pescador que não é mentiroso.

Procure representar "graficamente" as frases acima (isto é, usando diagramas de Venn) (figurinhas de conjuntos). Procure reescrever as frases usando outros quantificadores aliterar o sentido e depois escreva negativas para cada uma delas.  
Por exemplo:

I. Nenhum pescador é mentiroso é equivalente a dizer que se  $x$  é pescador, então NÃO É mentiroso ou: todo pescador não é mentiroso. Agora, quero escrever uma negativa para essa frase. (A frase I só pode ser falsa, se sua negativa for verdadeira? Tenho a frase I escrita de duas formas diferentes. Vejamos o que ocorre com a sua negativa: não (nenhum pescador é mentiroso). (Traduza para: não é verdade que (nenhum pescador é mentiroso).) Então, não (nenhum pescador é mentiroso) é equivalente a dizer: existe pelo menos um pescador que é mentiroso. Agora, supondo que I é verdadeira, o que podemos dizer sobre as outras?

2. Leia as seguintes afirmações:

- (I) Se um político tem muito dinheiro, então ele pode ganhar as eleições.
- (II) Se um político não tem muito dinheiro então ele não pode ganhar as eleições.
- (III) Se um político pode ganhar as eleições, então ele tem muito dinheiro.
- (IV) Se um político não pode ganhar as eleições, então ele não tem muito dinheiro.
- (V) Um político não pode ganhar as eleições se ele não tem muito dinheiro.
  - (a) Assumindo que (I) é verdadeiro, quais das outras afirmações são verdadeiras?

1

- (b) Qual a negação de (I)? E a sua recíproca? Qual é a contrapositiva?
- (c) Mesmas perguntas para (V).

Queremos demonstrar a validade de uma implicação

(\*) Se  $A$  então  $B$ , sabendo que a premissa  $A$  é falsa (isto é, é por exemplo algo da forma " $x \in \phi$ "). Então (\*) é automaticamente verdadeira e fazemos a prova por absurdo: suponhamos que (\*) não é verdadeira, então (\*) é falso e temos a prova por absurdo:  $A$  então  $B$  que é equivalente a  $A$  e não  $B$  (se não é verdade que  $A$  implica  $B$ , então podemos ter que valiam simultaneamente  $A$  e (não  $B$ ). Mas essa afirmação ( $A$  e não  $B$ ) não é verdadeira pois  $A$  é falso.

Se Marte é ~~uma planeta~~, então a grama é verde.

Se Mercúrio é um cometa, então grama é ~~verde~~ **azul**.

Se baleias são peixes, então peixes cantam.

De novo:  
Se  $A$  então  $B$ .  $A \implies B$  é verdadeira.

3. Identifique o que é hipótese e tese na frase abaixo:  
Nem todos os diamantes são jóias, os diamantes industriais são impróprios para fins ornamentais.

Atenção: Não se prova que um argumento é válido mostrando que sua conclusão é verdadeira. Deduzimos uma conclusão quando: a conclusão deve ser verdadeira se as premissas são verdadeiras, ou seja, há uma relação entre premissas e conclusão. Veja o exemplo de uma "conclusão não válida".

- (a) Todos os mamíferos são mortais.
- (b) Todos os cães são mortais.  
T Todos os cães são mamíferos.
- 4. Decida quais das afirmações são válidas.
  - (a) Todos os girassóis são amarelos e alguns pássaros são amarelos, logo nenhum pássaro é girassol.
  - (b) Alguns livros são verdes e algumas coisas verdes são comestíveis. Logo alguns livros são comestíveis.
  - (c) Como todos os peixes são mamíferos, todos os mamíferos são aves e existem minerais que são peixes, concluímos que existem minerais que são aves.
  - (d) Todos os homens são mortais. O presidente é um homem. Conclusão: o presidente é mortal.
  - (e) Alguns homens sabem nadar. Não existem peixes que não sabem nadar. Conclusão: os peixes sabem nadar.

2

(f) Alguns santistas são surfistas. Alguns surfistas são loiros. Não existem professores surfistas.

Conclusões:

- (1) Alguns santistas são loiros
- (2) Alguns professores são santistas
- (3) Alguns loiros são professores
- (4) Existem professores loiros.

5. Em cada caso abaixo, a tese foi concluída das hipóteses. Verifique se o raciocínio está correto.

(a) Hipótese:

Todo homem bem sucedido usa terno da marca TERNOX.  
Pedro usa ternos da marca TERNOX.

Tese: Pedro é bem sucedido.

(b) Hipóteses:

As mulheres adoram os homens que usam ternos da marca TERNOX  
Pedro usa ternos da marca TERNOX.  
Tese: As mulheres adoram Pedro.

(c) Hipóteses:

As mulheres adoram os homens que usam ternos da marca TERNOX  
As mulheres adoram Pedro.  
Tese: Pedro usa ternos da marca TERNOX.

(d) Hipóteses:

Todo homem bem sucedido usa terno da marca TERNOX.  
Pedro não é bem sucedido.  
Tese: Pedro usa ternos da marca TERNOX.

(e) Hipóteses: Todos os mamíferos são mortais.

Todos os cães são mortais.

Tese: Todos os cães são mamíferos.

(f) Hipóteses:

Arnaldo é mais alto que João. João é mais alto que Carlos.  
Tese: Arnaldo é mais alto que Carlos. (Isso lembra algo?)

3

(g) Hipóteses:

Todo cantor de rock tem cabelos compridos. Nenhum presidente de banco é cantor de rock.

Tese: Nenhum presidente de banco tem cabelos compridos.

(h) Hipóteses:

Toda aranha tem 8 pernas. Nenhum inseto tem 8 pernas.  
Tese: Nenhuma aranha é inseto.

(i) Hipóteses:

Alguns neuróticos são felizes. Algumas pessoas felizes não são ambiciosas.  
Tese: Alguns neuróticos não são ambiciosos.

(j) Hipóteses:

Todos os estudantes são pessoas.  
Todos os universitários são estudantes.  
Tese: Todos os universitários são pessoas.

(k) Hipóteses:

Todos os coelhos são mamíferos  
Todos os coelhos são ligeiros  
Tese: Todos os mamíferos são ligeiros.

6. Para cada afirmação abaixo, dê a sua negação

(a) Todo homem bem sucedido usa ternos de marca TERNOX.

(b) Para todo brasileiro, existe um chinês que tem a mesma idade.

(c) Para todo  $x \in \mathbb{R}$ , existe  $y \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = y$

(d) Para todo brasileiro existe um chinês que tem a mesma idade, o mesmo sexo e a mesma profissão.

(e) Para todo  $x \in \mathbb{R}$ , existe  $y \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = y$  e  $g(y) = x$ .

(f) Um ser humano de menos de 20kg ou é doente ou é criança.

(g) Eu não vou casar e não vou comprar uma bicicleta.

(h) Se  $x \in \mathbb{R}$  e  $x > 2$  então  $\lfloor \ln x^2 \rfloor / x \neq \ln x$

4

- (j) Existe um homem que é calvo e que, ou trabalha na prefeitura ou é ladrão (comece com "Todo homem...").
- (j) Existe um homem que é calvo e toca violão e que, ou trabalha na prefeitura ou é ladrão. (faça a seguinte negação começando com "Todo homem ...").

7. Uma aventura de Alice. Alice, ao entrar na floresta, perdeu a noção dos dias da semana. O leão e o unicórnio eram duas estranhas criaturas que frequentavam a floresta. O leão mentia às segundas, terças e quartas-feiras, e falava a verdade nos outros dias da semana. O unicórnio mentia às quintas, sextas e sábados, mas falava a verdade nos outros dias da semana.

**Problema I** - Um dia Alice encontrou o leão e o unicórnio descansando à sombra de uma árvore. Eles disseram:

Leão: Ontem foi um dos meus dias de mentir.

Unicórnio: Ontem foi um dos meus dias de mentir

A partir dessas afirmações, Alice descobriu qual era o dia da semana. Qual era?

**Problema II** - Em outra ocasião, Alice encontrou o Leão sozinho. Ele fez as seguintes afirmações:

(1) Eu menti ontem.

(2) Eu mentirei daqui a 3 dias

Qual era o dia da semana?

**Problema III** - Em qual dia da semana é possível o Leão fazer as seguintes afirmações?

(1) Eu menti ontem.

(2) Eu mentirei amanhã.

**Problema IV** - Em qual dia da semana é possível o Leão fazer as seguintes afirmações?

(a) Eu menti ontem e mentirei amanhã.

(b) Eu menti ontem ou eu mentirei amanhã.

(c) Se menti ontem, então mentirei de novo amanhã.

(d) Menti ontem se e somente se mentirei amanhã.

8. Extraído e adaptado de: "Geometry". Harold R. Jacobs. W. H. Freeman and Company, 1974.

1. Um aluno está resolvendo um teste com 5 questões do tipo verdadeiro ou falso. Ele fez as seguintes constatações:

Fato 1. Se a resposta à primeira questão é verdade, então a resposta da próxima é falso.

Fato 2. A resposta à última questão deve ser igual à da primeira.

Fato 3. A resposta à segunda questão é verdade.

Teorema: "A resposta à última questão é falso".

2. Kátia, Eliane e Júlia estavam conversando sobre quantos amigos Alexandre tem. Kátia disse que Alexandre tem pelo menos 50 amigos. Eliane diz que certamente Alexandre não tem tantos amigos assim, enquanto que Júlia afirma que Alexandre deve ter pelo menos um amigo. Se apenas uma das três está dizendo a verdade, quantos amigos Alexandre tem? Explique o seu raciocínio.

3. Na estória "A princesa ou o tigre?" de Frank Stockton, um jovem príncipe é forçado a escolher entre duas salas, numa delas está uma princesa e na outra um tigre. Se ele escolher a sala onde está a princesa, ele se casará com ela. Se ele escolher a outra sala, ele será forçado a enfrentar um tigre feroz. A escolha do jovem não é revelada na estória.

Muitos quebra-cabeças foram criados a partir deste tema. Num destes quebra-cabeças, o rei colocou tabuletas sobre cada uma das portas das salas, dizendo ao príncipe que o que está escrito numa das tabuletas é verdade e o que está na outra é mentira. Em que sala está a princesa?

Nesta sala está o príncipe e na outra está o tigre.	Em uma destas salas está a princesa e na outra está o tigre.
---	---