Cálculo I

1ª Lista de Exercícios

1) Esboce o gráfico de:

a) $f(x) = \dfrac{(x^2+3x-4)\ (x^2-5x+6)}{(x^2-3x+2)\ (x-3)}$

b) $g(x) = \begin{cases} x^2-4 & \text{se} \quad x<3 \\ 2x-1 & \text{se} \quad x\geq 3 \end{cases}$

2) Encontre o domínio das funções:

a) $f(x) = \left(\dfrac{x^2-1}{x+3} \right)^{3/4}$

b) $g(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-3}{x^4-5x^2+4}}$

3) Determine o conjunto solução de:

a) $(x-5)^2\ (x+10) \leq 0$

b) $\dfrac{2x+5}{3} - \dfrac{5x-1}{4} \geq \dfrac{-3x+8}{2}$

c) $\dfrac{4x}{2x-3} - \dfrac{1}{2} > \dfrac{3x}{2x+3}$

d) $\dfrac{3-t}{3+t} - \dfrac{t+3}{t-3} \leq \dfrac{2t-1}{t+3}$

e) $\left| \dfrac{x+2}{2x-3} \right| < 4$

f) $|x-4| - |x+1| > 3$

g) $|x-1| + |x-3| > |x+1|$

4) a) Dados $f(x)= \cos x$ e $g(x)= \log x$, determine I e J subconjuntos de $\mathbb{R}$ tais que se $f:I\to\mathbb{R}$ e $g:J\to\mathbb{R}$ então existe $g\circ f:I\to\mathbb{R}$.

b) Dada $L(x)=\text{sen}(x^2-1)$, encontrar uma decomposição de $L=f\circ g$, dando dom f, dom g.

c) Sejam $f(x)= \begin{cases} 0 & x<0 \\ x^2 & 0\leq x\leq 1 \\ 0 & x>1 \end{cases}$ e $g(x)= \begin{cases} 1 & x<0 \\ 2x & 0\leq x\leq 1 \\ 1 & x>1 \end{cases}$

Encontre $f\circ g$ e $g\circ f$, dando os respectivos domínios e imagens.

5) Encontre a solução e represente a resposta geometricamente (na reta real), utilizando o fato do módulo ser a distância na reta:

a) $\{x\in\mathbb{R} \ / \ |x-2|=|x-7|\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \ / \ |x+1| = 2|x-2|\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \ / \ |x-4| < 1/2\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} \ / \ |x+2| \geq 1\}$

(1) Resolva as seguintes inequações: (a) $\frac{2x-1}{x+1} < 0$;
(b) $\frac{2x-1}{x-3} > 5$; (c) $\left|\frac{3-2x}{2+x}\right| \leq 4$; (d) $\left|\frac{1-x}{3x+1}\right| > 2$;
(e) $x(2x-1)(x+1) > 0$; (f) $(2x-3)(x^2+1) < 0$; (g) $\frac{x^2-9}{x+1} < 0$;
(h) $3x^2 \geqslant 48$; (i) $3x^2+x-2 > 0$; (j) $(2x+1)(x^2+x+1) \leq 0$
(k) $x^3-1 > 0$; (l) $x^3+6x^2+11x+6 < 0$.

(2) Seja $f(x)$ um polinômio de grau $n \geqslant 1$. Prove que α é raiz de $f(x)$ se e só se $f(x)$ é divisível por $x-\alpha$.

(3) Resolva as seguintes equações:
(a) $|x-2| = -1$; (b) $|x| = 2x+1$; (c) $|3x+2| = 0$,
(d) $|x-1| + 2x - 3 = 1$; (e) $|2x+1| - |x-3| = 5$.

(4) Resolva as seguintes inequações:
(a) $|3x-1| < -2$; (b) $|x+1| < |2x-1|$; (c) $|x-1| - |x+2| > x$;
(d) $|x+2| + |x-1| > 1$.

(5) Prove as seguintes desigualdades:
(a) $|x| - |y| \leq |x-y|$; (b) $|y| - |x| \leq |x-y|$; (c) $\big||x|-|y|\big| \leq |x-y$

(6) Determine, caso existam, o máximo, mínimo, s premo e ínfimo dos seguintes conjuntos:
(a) $A := \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 4\}$; (b) $A := \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < 4\}$

MAT 3110 (Cálculo I) - Lista de exercícios nº 1 - fg ②

(c) $A := \{x\in\mathbb{R} \mid \frac{x-2}{x+3} \leq 0\}$; (d) $A := \{m\in\mathbb{N} \mid \frac{m}{m+1}\}$

(e) $A := \{\frac{m}{m+3}[2+(-1)^m] \mid m\in\mathbb{N}\}$.

(7) Mostre que se $a, b \in \mathbb{R}$ então:

(a) $\max(a,b) = \frac{a+b+|a-b|}{2}$; (b) $\min(a,b) = \frac{a+b-|a-}{2}$

(8) Prove as seguintes afirmações:

(a) A soma de um racional com um irracional é irracional;

(b) O produto de um racional diferente de zero por um irracional é irracional

(c) (9) Exibir dois números irracionais α e β tais que $\alpha+\beta$ e $\alpha\beta$ são números racionais.

(10) Prove que cada um dos números abaixo é irraciona

(a) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; (b) $\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ → este não é! na verdade é 1.

(11) Determine os valores de x reais para os quais cada uma das expressões abaixo é um número real:

(a) $\frac{1}{\sqrt{4-3x}}$; (b) $\frac{1}{\sqrt{x^2-x-12}}$; (c) $\frac{1}{\sqrt{x^2-x+12}}$

(d) $\frac{x-1}{x^2-1}$; (e) $\frac{1}{\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)}}$; (f) $\sqrt{\frac{x-1}{x^2-1}}$.

1. Encontre todos os valores de x (reais) que satisfazem a cada uma das equações:

(a) $|x-2|=1$ (b) $|x+1|=|\frac{x}{2}-3|$
(c) $|x^2-5|=4$ (d) $|x^2-4|=5$
(e) $x^4=x^2$ (f) $\sqrt{x^3}=(\sqrt{x})^3$
(g) $\sqrt[4]{x^2}=\sqrt{x}$ (h) $x(x^2+1)=x$
(i) $\frac{x^2-1}{x-1}=2$ (j) $\operatorname{sen} x=\cos x$

2. Resolva as seguintes inequações. (Não esqueça de examinar todas as possibilidades.)

(a) $x^4<x^2$ (b) $(x-1)(x+2)\leq 0$
(c) $x^3+1<x^2+x$ (d) $(2x+1)^8(x+1)\leq 0$
(e) $\frac{x^2-1}{x^2-3x}\geq 0$ (f) $(x-2)^2\leq 4$
(g) $|x^2-2|<4$ (h) $|x^2-4|<2$
(i) $|x^2-1|<1$ (j) $0<|x-2|<1$
(k) $\frac{1}{x}<1$ (l) $-x\leq x$
(m) $x\leq -x$ (n) $\cos x<\frac{1}{2}$
(o) $\cos 2x<\frac{1}{2}$ (p) $|\operatorname{sen} x|<\frac{1}{2}$

3. Agora ache todos os valores de x para os quais cada uma das seguintes expressões está bem definida (usando números reais):

(a) $\frac{1}{\sqrt{x^2-x-12}}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{(x-2)^2}}$
(c) $\sqrt{-x}$ (d) $\operatorname{tg} x$
(e) $\operatorname{tg} 2x$ (f) $\operatorname{tg}(x-\frac{\pi}{2})$
(g) $\operatorname{sen}(\frac{1}{x})$ (h) $\operatorname{tg}(\frac{1}{x}-\frac{\pi}{2})$

4. Verifique as seguintes igualdades:

(a) $2\cos^2 x=1+\cos 2x$ (b) $2\operatorname{sen}^2 x=1-\cos 2x$ (Sugestão: desenvolva $\cos 2x$.)
(c) $x^2-1=(x-1)(x+1)$ (d) $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$
(e) $x^4-1=(x-1)(x^3+x^2+x+1)$ (f) $x-1=(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1))$
(g) $(x+1)^2=x^2+2x+1$ (h) $(x+1)^3=x^3+3x^2+3x+1$
(i) $(x+1)^4=x^4+4x^3+6x^2+4x+1$ (j) $x^4+1=(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$

5. Agora tente verificar as seguintes equivalências:

(a) sendo $a\geq 0$, $|x|\leq a \Leftrightarrow -a\leq x\leq a$
(b) sendo $a\geq 0$, $|x|\geq a \Leftrightarrow x\leq -a$ ou $x\geq a$

6. Desenhe, num sistema de coordenadas O_{xy}, os seguintes gráficos:

(a) $y=2-3x$ (b) $y=x^2-4x-21$
(c) $y=21+4x-x^2$ (d) $y=x^3$
(e) $y=|x|$ (f) $y=|x|+1$
(g) $y=2\operatorname{sen} x$ (h) $y=1+\cos x$

1. Encontre o domínio de cada uma das funções:

(a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-x-12}}$ (b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x-2)^2}}$

(c) $f(x) = \sqrt{-x}$ (d) $g(x) = \sqrt{(1-x)(2+x)}$

(e) $h(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2-2x}$ (f) $f(x) = x^{-\frac{1}{3}}$

(g) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{7x^2+5}}$ (h) $f(x) = \frac{x^3-x^2}{x-1}$

2. Separe a equação $2x^2+2xy+y^2=3$ em duas equações, de modo que cada uma delas expresse y como função de x.

3. Uma função se diz *par* se $f(-x) = f(x)$ para todo x do seu domínio, o qual é suposto da forma $D = (-a, a)$ ou $D = [-a, a]$, com $a > 0$. Nas mesmas condições, f se diz *impar* quando se tem $f(-x) = -f(x)$. Determine se f é par ou impar ou nem par nem impar.

(a) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ (b) $f(x) = \frac{1}{x^4}$

(c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ (d) $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$

(e) $f(x) = |x|$ (f) $f(x) = 2|x| - x$

(g) $f(x) = \frac{|x|}{x}$ (h) $f(x) = \frac{x^3+x}{x^2+1}$

4. Se $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ ache: $f(0)$, $f(-3)$, $f(-x)$, $f(\frac{1}{x})$, $f(f(x))$.

5. Se $f(x) = \sqrt[3]{x}$ e $g(x) = \frac{1}{1+x}$, ache: $f(g(x))$ e $g(f(x))$. Dê seus domínios.

6. Se $f(x) = \sqrt{3-x}$ e $g(x) = \sqrt{x^2-1}$, ache: $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x)g(x)$ e $\frac{f(x)}{g(x)}$. Dê seus domínios.

7. Agora sboce os seguintes gráficos:

(a) $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ (b) $y = \frac{2}{(x+1)^2} + 2\pi$

(c) $y = \frac{3x+2}{x}$ (d) $y = \frac{1}{x^3}$

(e) $y = \frac{1}{(x+\pi))^3}$ (f) $y = \frac{x^2-3x+2}{2-x}$

(g) $y = \frac{x^3-x^2}{x-1}$ (h) $y = 2\sqrt{x-5} - 3$

(k) $y = \sqrt[3]{x}$ (l) $y = \sqrt[3]{x-1}$

(m) $y = |3x+5|$ (n) $y = |x^2 - x + 2|$

(o) $y = |x| + x$ (p) $y = 2|x| - x$

(q) $y = \frac{|x|}{x}$ (r) $y = \sqrt{-x}$

Respostas

1.
(a) $(-\infty, -3) \cup (4, +\infty)$ (b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$

(c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\} = (-\infty, 0]$ (d) $(-2, 1]$

(e) $[-3, 0) \cup (0, 2) \cup (2, 3]$ (f) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$

(g) $\mathbb{R}$ (h) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$

2. $y = -x - \sqrt{3-x^2}, \quad y = -x + \sqrt{3-x^2}$

3. (a) impar (b) par (c) impar (d) nem par nem impar

(e) par (f) nem par nem impar (g) impar (h) impar

TG1

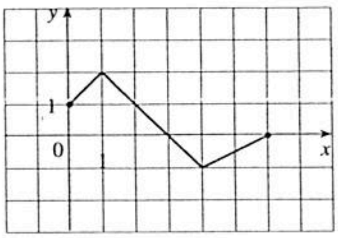
Cálculo I

Stewart 4ª edição

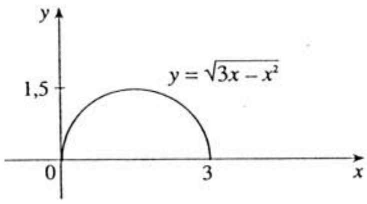
5. O gráfico de f é dado. Use-o para fazer o gráfico das seguintes funções.

(a) $y = f(2x)$ (b) $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$

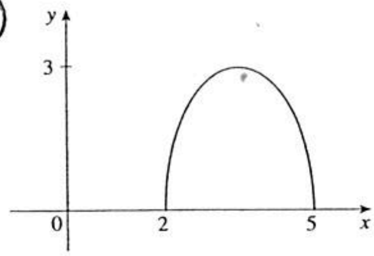
(c) $y = f(-x)$ (d) $y = -f(-x)$



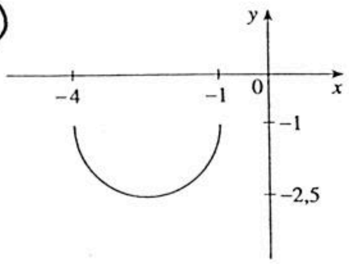
6–7 □ O gráfico de $y = \sqrt{3x - x^2}$ é dado. Use transformações para criar uma função cujo gráfico é mostrado.



6.



7.



9–24 □ Faça o gráfico de cada função, sem plotar os pontos, mas começando com o gráfico de uma das funções básicas dadas na Seção 1.2, e então aplicando as transformações apropriadas.

9. $y = -1/x$

10. $y = 2 - \cos x$

11. $y = \operatorname{tg} 2x$

12. $y = \sqrt[3]{x + 2}$

13. $y = \cos(x/2)$

14. $y = x^2 + 2x + 3$

15. $y = \dfrac{1}{x - 3}$

16. $y = -2 \operatorname{sen} \pi x$

17. $y = \dfrac{1}{3} \operatorname{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$

18. $y = 2 + \dfrac{1}{x + 1}$

19. $y = 1 + 2x - x^2$

20. $y = \frac{1}{2}\sqrt{x + 4} - 3$

21. $y = 2 - \sqrt{x + 1}$

22. $y = (x - 1)^3 + 2$

23. $y = ||x| - 1|$

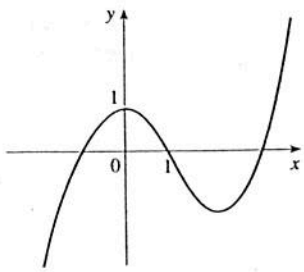
24. $y = |\cos x|$

27. (a) Como o gráfico de $y = f(|x|)$ está relacionado com o gráfico de f?

(b) Esboce o gráfico de $y = \operatorname{sen} |x|$.

(c) Esboce o gráfico de $y = \sqrt{|x|}$.

28. Use o gráfico dado de f para esboçar o gráfico $y = 1/f(x)$. Quais aspectos de f são os mais importantes no esboço de $y = 1/f(x)$? Explique como eles são usados.



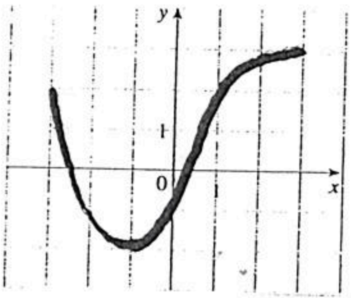
CÁLCULO, vol. I, 4ª ed., James Stewart, Pioneira/Thomson, 2002

L1

1

p.22

1. É dado o gráfico de uma função f.
   (a) Obtenha o valor de $f(-1)$.
   (b) Estime o valor de $f(2)$.
   (c) $f(x) = 2$ para quais valores de x?
   (d) Estime os valores de x para os quais $f(x) = 0$.
   (e) Obtenha o domínio e a variação de f.
   (f) Em quais intervalos f é crescente?



p.23

29–40 ▫ Encontre o domínio e esboce o gráfico da função.

29. $f(x) = 3 - 2x$

30. $f(x) = x^2 + 2x - 1$

31. $g(x) = \sqrt{x-5}$

32. $g(x) = \sqrt{6-2x}$

33. $G(x) = |x| + x$

34. $H(x) = |2x|$

35. $f(x) = x/|x|$

36. $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x + 6}{x + 2}$

37. $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 0 \\ x + 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$

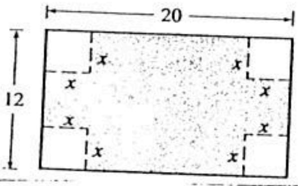
38. $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{se } x < -1 \\ 3 - x & \text{se } x \geq -1 \end{cases}$

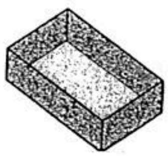
39. $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{se } x \leq -1 \\ x^2 & \text{se } x > -1 \end{cases}$

40. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \leq -1 \\ 3x + 2 & \text{se } |x| < 1 \\ 7 - 2x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

p.24

53. Uma caixa sem a tampa deve ser construída de um pedaço retangular de papelão com dimensões 12 por 20 polegadas. Deve-se cortar quadrados de lados x de cada canto e depois dobrar, conforme mostra a figura. Expresse o volume V da caixa como uma função de x.





59–64 ▫ Determine se f é par, ímpar ou nenhum dos dois. Se f for par ou ímpar, use a simetria para esboçar seu gráfico.

59. $f(x) = x^{-2}$

60. $f(x) = x^{-3}$

61. $f(x) = x^2 + x$

62. $f(x) = x^4 - 4x^2$

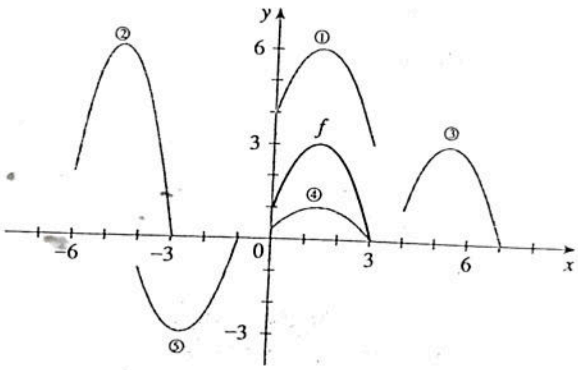
63. $f(x) = x^3 - x$

64. $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + 1$

p.46

2. Explique como obter, a partir do gráfico de $y = f(x)$, os gráficos a seguir
   (a) $y = 5f(x)$
   (b) $y = f(x - 5)$
   (c) $y = -f(x)$
   (d) $y = -5f(x)$
   (e) $y = f(5x)$
   (f) $y = 5f(x) - 3$

3. O gráfico $y = f(x)$ é dado. Associe cada equação com seu gráfico e dê razões para suas escolhas.
   (a) $y = f(x - 4)$
   (b) $y = f(x) + 3$
   (c) $y = \frac{1}{3}f(x)$
   (d) $y = -f(x + 4)$
   (e) $y = 2f(x + 6)$



p.48

33–34 ▫ Use os gráficos de f e g e o método da adição gráfica para esboçar os gráficos de $f + g$.

33. $f(x) = x, \quad g(x) = 1/x$

34. $f(x) = x^3, \quad g(x) = -x^2$

35–40 ▫ Encontre as funções $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ e $g \circ g$ e seus domínios.

35. $f(x) = 2x^2 - x, \quad g(x) = 3x + 2$

36. $f(x) = \sqrt{x-1}, \quad g(x) = x^2$

37. $f(x) = 1/x, \quad g(x) = x^3 + 2x$

38. $f(x) = \dfrac{1}{x-1}, \quad g(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

39. $f(x) = \text{sen } x, \quad g(x) = 1 - \sqrt{x}$

40. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}, \quad g(x) = \sqrt{1 - x}$

p.75

11. Suponha dado o gráfico de f. Escreva uma equação para cada um dos gráficos obtidos a partir do gráfico de f da seguinte forma.
   (a) deslocando 2 unidades para cima.
   (b) deslocando 2 unidades para baixo.
   (c) deslocando 2 unidades para a direita.
   (d) deslocando 2 unidades para a esquerda.
   (e) refletindo em torno do eixo x.
   (f) refletindo em torno do eixo y.
   (g) esticando verticalmente por um fator de 2.
   (h) encolhendo verticalmente por um fator de 2.
   (i) esticando horizontalmente por um fator de 2.
   (j) encolhendo horizontalmente por um fator de 2.