Geometria Analítica - Prof.ª Cecilia Chirenti

Lista 3 - Produto Escalar

1. Verdadeiro ou falso?
   (a) A medida angular entre um vetor não-nulo e ele mesmo é 0.
   (b) A medida angular entre dois vetores não-nulos é $\pi/2$ radianos.
   (c) A medida angular entre dois vetores de sentido contrário é 180 graus.
   (d) Não existem $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tais que $ang(\vec{u}, \vec{v}) = \text{arcsen}(-1/2)$.
2. Calcule o cosseno do ângulo formado entre os vetores $(1, 4, -1)$ e $(0, 2, 3)$.
3. Os vetores não-nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais, têm normas iguais e $\vec{w}$ é gerado por eles. Sabendo que $\vec{w} \cdot \vec{u} = \vec{w} \cdot \vec{v}$ e que $\vec{w}$ não é nulo, obtenha as medidas angulares, em graus, entre $\vec{u}$ e $\vec{w}$ e entre $\vec{v}$ e $\vec{w}$.
4. Determine m para que os vetores $(2, m, -3)$ e $(2, 2, m)$ fiquem ortogonais.
5. Os lados do triângulo equilátero ABC têm medida 2. Calcule $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$.
6. São dados $\vec{u} = (2, 1, -3)$ e $\vec{v} = (1, 2, 1)$.
   (a) Se $\vec{w} = \vec{u} + \lambda\vec{v}$, determina λ para que $\vec{u}$ e $\vec{w}$ sejam ortogonais.
   (b) Determine o cosseno do ângulo que $\vec{u}$ forma com $\vec{v}$.
7. Obtenha um vetor $\vec{u}$ ortogonal a $\vec{v} = (4, -1, 5)$ e $\vec{w} = (1, -2, 3)$ tal que $\vec{u} \cdot (1, 1, 1) = -1$.
8. Sejam $\vec{u} = (1, 1, 0)$ e $\vec{v} = (0, 1, 1)$. Pede-se um vetor $\vec{x}$ sabendo-se que: $\vec{x} - \vec{u}$ é ortogonal a $\vec{u}$, $\vec{x} - \vec{v}$ é ortogonal a $\vec{v}$, $|\vec{x}| = \sqrt{11}$ e $\vec{x}$ e $\vec{u}$ formam um ângulo agudo.
9. Decomponha $\vec{u} = (1, 0, 3)$ como soma dos vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ tais que $\vec{v}$, $(1, 1, 1)$ e $(-1, 1, 2)$ sejam ℓde $\vec{w}$ seja ortogonal aos dois últimos.
10. Decomponha o vetor $\vec{u} = (3, -1, 5)$ em uma soma de vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, sabendo que $\vec{a}$ é paralelo ao vetor $(-2, -4, -10)$ e $\vec{b}$ é ortogonal ao vetor $(0, 0, 1)$.
11. Dados os vetores $\vec{u} = (0, 1, -1)$ e $\vec{w} = (2, 5, 4)$, calcule o comprimento da projeção do vetor $-4\vec{u} + \vec{w}$ sobre o eixo cuja direção é dada pelo vetor $\vec{w} - 2\vec{u}$.
12. Dados $\overrightarrow{AB} = (1, 0, 1)$ e $\overrightarrow{CB} = (0, 0, 2)$,
    (a) mostre que o triângulo ABC é retângulo;

(b) determine a projeção de $\overrightarrow{AB}$ sobre $\overrightarrow{BC}$;

(c) ache o comprimento da altura relativa à hipotenusa.

13. Ache a projeção ortogonal de $\vec{v} = (1, -2, 3)$ na direção de um eixo que forma ângulos iguais com os vetores da base ortonormal $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

14. Determine o ângulo formado pelos vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$, sabendo que $|\vec{u}| = |\vec{v}| = |\vec{u} + \vec{v}|$.

15. Sejam A, B e C pontos não-colineares, $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Prove que, se $\vec{a}$ e $\vec{u}$ são de mesmo sentido e o mesmo ocorre com $\vec{b}$ e $\vec{v}$, e se $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, então $\vec{a} + \vec{b}$ é paralelo à bissetriz de $B\hat{A}C$. Em particular, o vetor soma dos versores de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é paralelo à bissetriz de $B\hat{A}C$

16. Supondo $\vec{a}$ e $\vec{b}$ não nulos, demonstre algebricamente que: $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$ se, e somente se, $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são paralelos e de mesmo sentido.

17. Lembrando que $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$, demonstre:

    (a) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ se, e somente se $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

    (b) Interprete geometricamente o resultado acima.

18. Calcule a projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ em cada caso.

    (a) $\vec{v} = (1, -1, 2)\,,\ \vec{u} = (3, -1, 1)$

    (b) $\vec{v} = (-1, 1, 1)\,,\ \vec{u} = (-2, 1, 2)$

    (c) $\vec{v} = (1, 3, 5)\,,\ \vec{u} = (-3, 1, 0)$

    (d) $\vec{v} = (1, 2, 4)\,,\ \vec{u} = (-2, -4, -8)$

19. Em cada caso, decomponha $\vec{v}$ como soma de dois vetores $\vec{p}$ e $\vec{q}$, de modo que $\vec{p}$ seja paralelo e $\vec{q}$ seja ortogonal a $\vec{u}$.

    (a) $\vec{v} = (-1, -3, 2)\,,\ \vec{u} = (0, 1, 3)$

    (b) $\vec{v} = (0, 1, 2)\,,\ \vec{u} = (0, -1, -2)$

    (c) $\vec{v} = (1, 2, -1)\,,\ \vec{u} = (2, -1, 0)$

20. Exercícios do Capítulo 3 do livro Vetores e uma Introdução à Geometria Analítica.

21. Exercícios dos Capítulo 9 do livro Geometria Analítica - um tratamento vetorial.