Nome:____

Sequências e Séries - Turma A

Prova 1 - 10/07/2018

1. (1,5) Uma sequência é definida pela seguinte fórmula de recorrência:

$$x_1 = 1\,, \quad x_2 = 1\,, \quad \frac{1}{x_{n+2}} = \frac{1}{x_{n+1}} + \frac{1}{x_n}\,.$$

   Mostre que a sequência converge e calcule o seu limite.

2. (1,0) Calcule a soma das séries dadas:

   (a) $0,9 + 0,09 + 0,009 + 0,0009 + \cdots$

   (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}}$

3. (1,5) Aplique os testes de convergência para decidir se as séries de termos positivos abaixo convergem ou divergem. Identifique o teste usado em cada caso.

   (a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^{1/4}}$

   (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{7k+3}{(5k+1)3^k}$

   (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{k!}$

4. (1,5) Se for aplicável, use o teste da série alternada e determine se as séries abaixo convergem absolutamente, convergem condicionalmente ou divergem.

   (a) $\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} + \cdots$

   (b) $1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)^2} + \cdots$

   (c) $\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 5} + \cdots + \frac{(-1)^n}{\ln n} + \cdots$

5. (2,0) Demonstração: Prove que se $\sum a_n$ converge, então $a_n \to 0$ quando $n \to \infty$.

6. (2,5) Mostre que a soma dos primeiros $2n$ termos da série

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$$

   é a mesma dos primeiros n termos da série

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 6} + \cdots$$

   Essas séries convergem? Qual é a soma dos $2n+1$ primeiros termos da primeira série? Se as séries convergem, qual a sua soma?