Sequências e Séries - Atividade para nota 2

Prof.ª Cecilia Chirenti

1. Use as seguintes etapas para mostrar que a sequência

$$t_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \frac{1}{n} - \ln n$$

tem um limite. (O valor do limite é denotado por γ e é chamado constante de Euler.)

   (a) Use o Teste da Integral para mostrar que $t_n > 0$ para todo n (faça também uma figura para ilustrar o seu argumento).

   (b) Interprete

   $$t_n = t_{n+1} = [\ln(n+1) - \ln n] - \frac{1}{n+1}\,,$$

   como uma diferença de áreas para mostrar que $t_n - t_{n+1} > 0$. Portanto, $\{t_n\}$ é uma sequência decrescente.

   (c) Use o Teorema de Sequência Monótona para mostrar que $\{t_n\}$ é convergente.

   (d) Ainda não se sabe se γ é racional ou irracional. Calcule γ com 6 casas de precisão e estime o seu erro.

   (e) A constante de Euler aparece frequentemente em análise e de teoria dos números. Pesquise na internet um desses casos e explique brevemente.

2. Use as seguintes etapas para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2\,.$$

Sejam h_n e s_n as somas parciais das séries harmônica e harmônica alternada.

   (a) Mostre que $s_{2n} = h_{2n} - h_n$.

   (b) Do ex. 1, temos

   $$h_n - \ln n \to \gamma \quad \text{quando} \quad n \to \infty\,,$$

   e, portanto,

   $$h_{2n} - \ln(2n) \to \gamma \quad \text{quando} \quad n \to \infty\,.$$

   Use estes fatos junto com a parte (a) para mostrar que $s_{2n} \to \ln 2$ quando $n \to \infty$.