Sequências e Séries

Prof.ª Cecilia Chirenti

Lista 7 - Soluções de EDOs por séries de potências

1. Resolva cada equação diferencial usando os métodos vistos no curso de IEDO e então compare os resultados com as soluções obtidas através de séries de potências $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

   (a) $y' + y = 0$

   (b) $y' + x^3 y = 0$

   (c) $y'' - y = 0$

   (d) $2y'' + y = 0$

2. Para cada equação diferencial, encontre duas soluções em série de potências linearmente independentes em torno do ponto ordinário $x = 0$.

   (a) $y'' = xy$

   (b) $y'' + x^2 y' + xy = 0$

   (c) $(x^2 + 2)y'' + 3xy' - y = 0$

   (d) $y'' - xy' - (x + 2)y = 0$

   (e) $xy'' + (\operatorname{sen} x)y' = 0$

   (f) $y'' + e^x y' - y = 0$

3. Use o método de série de potências para resolver a equação diferencial dada sujeita às condições iniciais indicadas:

   (a) $(x - 1)y'' - xy' + y = 0$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 6$

   (b) $(x^2 + 1)y'' + 2xy' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

4. Use o método de série de potências para resolver a equação não-homogênea.

   (a) $y'' - xy = 1$

   (b) $y'' - 4xy' - 4y = e^x$

5. A equação diferencial $y'' - 2xy + 2ny = 0$ é conhecida como *equação de Hermite*. Quando $n \geq 0$ é um inteiro, a equação de Hermite apresenta uma solução polinomial. Os polinômios de Hermite são importantes no estudo da mecânica quântica. Obtenha as soluções polinomiais correspondentes a $n = 1$ e $n = 2$.

6. Determine os pontos singulares de cada equação diferencial. Classifique cada ponto singular como regular ou irregular.

   (a) $x^3 y'' + 4x^2 y' + 3y = 0$

   (b) $y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x-1}^3 y = 0$

   (c) $(x^2 + x - 6)y'' + (x + 3)y' + (x - 2)y = 0$

   (d) $x(x^2 + 1)^2 y'' + y = 0$

7. Nos problemas abaixo, mostre que as raízes indiciais não diferem por um inteiro. Use o método de Frobenius para obter duas soluções seriais linearmente independentes em torno do ponto singular regular $x_0 = 0$.

(a) $2xy'' + 5y' + xy = 0$ (b) $2x^2y'' - x(x-1)y' - y = 0$

8. Nos problemas abaixo, mostre que as raízes indiciais diferem por um inteiro. Use o método de Frobenius para obter duas soluções seriais linearmente independentes em torno do ponto singular regular $x_0 = 0$. Encontre a solução geral em $(0, \infty)$.

   (a) $x(x-1)y'' + 3y' - 2y = 0$ (b) $xy'' - y' + x^3y = 0$

9. Resolva a equação de Cauchy-Euler $x^2y'' = 3xy' - 8y = 0$ pelo método de Frobenius.

10. No estudo avançado de equações diferenciais é importante examinar a natureza de um ponto singular no infinito. Dizemos que uma equação diferencial possui um ponto singular no infinito se, depois de fazermos a substituição $z = 1/x$, a equação resultante tiver uma singularidade em $z = 0$.

    (a) Mostre que a equação diferencial $x^2y'' - 4y = 0$ tem uma singularidade no infinito.
    (b) Classifique o ponto singular no infinito como regular ou irregular.

11. Em diversos problemas de física-matemática é necessário estudar a equação diferencial

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (1+\alpha+\beta)x]y' - \alpha\beta y = 0\,,$$

    onde α, β, γ são constantes. Essa equação é conhecida como *equação hipergeométrica*.

    (a) Mostre que $x = 0$ é um ponto singular regular, e que as raízes da equação indicial são 0 e $1 - \gamma$.
    (b) Mostre que $x = 1$ é um ponto singular regular, e que as raízes da equação indicial são 0 e $\gamma - \alpha - \beta$.
    (c) Supondo que $1 - \gamma$ não é um inteiro positivo, mostre que uma solução da equação hipergeométrica em uma vizinhança de $x = 0$ é

$$y_1(x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma \cdot 1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)2!}x^2 + \cdots$$

    Qual o valor que você esperaria para o raio de convergência desta série?
    (d) Supondo que $a - \gamma$ não é inteiro, mostre que uma segunda solução para $0 < x < 1$ é

$$y_2(x) = x^{1-\gamma}\left[1 + \frac{(\alpha-\gamma+1)(\beta-\gamma+1)}{(2-\gamma)1!} + \frac{(\alpha-\gamma+1)(\alpha-\gamma+2)(\beta-\gamma+1)(\beta-\gamma+2)}{(2-\gamma)(3-\gamma)2!}x^2 + \cdots\right]$$

    (e) Mostre que o ponto no infinito é um ponto singular regular e que as raízes da equação indicial são α e β.

12. Mostre que a equação de Bessel de ordem 1/2

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0\,, \quad x > 0$$

    pode ser reduzida à equação $v'' + v = 0$ pela mudança da variável dependente $y = x^{-1/2}v(x)$. Conclua disse que $y_1(x) = x^{-1/2}\cos x$ e $y_2(x) = x^{-1/2}\operatorname{sen} x$ são soluções da equação de Bessel de ordem 1/2.