Nome:____

Geometria Diferencial I

Prova 1 - 29/03/2018

1. (2,5 pts) Considere a curva

$$\beta(s) = \left(\frac{(1+s)^{3/2}}{3}, \frac{(1-s)^{3/2}}{3}, \frac{s}{\sqrt{2}} \right)$$

definida no intervalo $I : -1 < s < 1$. Mostre que β possui velocidade unitária e calcule κ, τ, T, N, B.

2. (2,5pts) O *Teorema Fundamental da Teoria Local das Curvas* afirma que dadas duas funções diferenciáveis $\kappa(s) > 0$ e $\tau(s)$, com $s \in I$, existe uma curva parametrizada regular $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ tal que s é o comprimento de arco, $\kappa(s)$ é a curvatura e $\tau(s)$ é a torção de α. Este teorema pode ser demonstrado observando-se que as fórmulas de Frenet podem ser consideradas como um sistema diferencial de 9 equações lineares de primeira ordem acopladas.

   (a) Escreva este sistema. Dadas condições iniciais em $s_0 \in I$, podemos afirmar que este sistema possui solução?

   (b) Suponha que é dado um triedro ortonormal orientado positivamente $\{t_0, n_0, b_0\}$ em $\mathbb{R}^3$ e um valor $s_0 \in I$. Mostre que existe uma família de triedros $\{t(s), n(s), b(s)\}$, $s \in I$, com $t(s_0) = t_0, n(s_0) = n_0, b(s_0) = b_0$. (Use o sistema de equações diferenciais para mostrar que a família $\{t(s), n(s), b(s)\}$ permanece ortogonal para todo $s \in I$.)

   (c) Obtenha uma curva $\alpha(s)$ a partir da família $\{t(s), n(s), b(s)\}$. Esta curva é única?

3. (2,5pts) Seja β uma curva em $\mathbb{R}^3$ com velocidade unitária e $\kappa > 0$, e suponha que E_1, E_2, E_3 é um campo referencial em $\mathbb{R}^3$ tal que a restrição de seus campos vetoriais a β resulta no campo referencial de Frenet T, N, B de β. Mostre que

$$\omega_{12}(T) = \kappa\,,\ \omega_{13}(T) = 0\,,\ \omega_{23}(T) = \tau\,,$$

e deduza as fórmulas de Frenet a partir das equações de conexão.

4. (2,5pts) Para a 1-forma $\phi = \sum f_i \theta_i$, mostre que

$$d\phi = \sum_j \left\{ df_j + \sum_i f_i \omega_{ij} \right\} \wedge \theta_j\,.$$

EXTRA

5. (1,0pt) Suponha que $r : R \to (0, \infty)$ uma função suave e seja γ a curva dada por: $\gamma(\theta) = (r(\theta), \theta)$ em coordenadas polares.

   (a) Encontre a fórmula para a curvatura de γ em θ em função de r, r', r''.

   (b) Suponha que γ seja a espiral logarítmica com $r(\theta) = e^{a\theta}$. Mostre que a curvatura de γ em um ponto a uma distância r da origem é $1/r(\sqrt{1+a^2})$.

   (c) Dê uma interpretação para os casos $a \to 0$ e $a \to \infty$.