Nome:____

Geometria Diferencial I

Prova 1 - 29/03/2019

1. (2,5 pts) Sejam $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}^3$ curvas tais que $\alpha'(t)$ e $\beta'(t)$ são vetores paralelos (e possuem as mesmas coordenadas Euclidianas) em todo t. Mostre que α e β são curvas paralelas no seguinte sentido: existe um ponto $p \in \mathbb{R}^3$ tal que $\beta(t) = \alpha(t) + p$ para todo t.

2. (2,5pts) Se um corpo rígido se move ao longo de uma curva $\alpha(s)$ (suposta com velocidade unitária), então o movimento do corpo consiste de uma translação ao longo de α e de uma rotação ao redor de α. A rotação é determinada por um vetor velocidade angular ω que satisfaz $T' = \omega \times T$, $N' = \omega \times N$ e $B' = \omega \times B$. O vetor ω é chamado *vetor de Darboux*.

   (a) Escreva ω em função de T, N e B

   (b) Mostre que $T' \times T'' = \kappa^2 \omega$

3. (2,5pts) Seja W um campo vetorial em $\mathbb{R}^3$. Sejam p um ponto em $\mathbb{R}^3$ e v um vetor tangente em $T_p(\mathbb{R}^3)$ tais que $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ seja uma curva tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Denotamos por $P_{\alpha,t} : T_{\alpha(0)}(\mathbb{R}^3) \to T_{\alpha(t)}(\mathbb{R}^3)$ o transporte paralelo ao longo de α de $\alpha(0)$ a $\alpha(t)$, $t \in I$. Mostre que

$$(\nabla_v W) = \frac{d}{dt}\left(P_{\alpha,t}^{-1}\big(W(\alpha(t))\big)\right)\Big|_{t=0},$$

   onde o lado direito é o vetor velocidade da curva $P_{\alpha,t}^{-1}\big(W(\alpha(t))\big)$ em $t = 0$. (Assim, a noção de derivada covariante pode ser obtida da noção de transporte paralelo).

4. (2,5pts) Use a definição das formas de conexão ω_{ij} para um referencial E_1, E_2, E_3 de $\mathbb{R}^3$ para mostrar que $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$. A seguir, escreva as equações de conexão do referencial para dar uma interpretação geométrica das formas de conexão.

EXTRA

5. (1,0pt) Seja a elipse no plano parametrizada por $\beta(t) = (2\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$. Encontre uma parametrização do *círculo osculante* $\gamma(t)$ que aproxima β perto de $\gamma(t_0)$ tal que

$$\gamma(t_0) = \beta(t_0)\,, \quad \gamma'(t_0) = \beta'(t_0)\,, \quad \gamma''(t_0) = \beta'(t_0)\,,$$

   para (a) $t_0 = 0$ e (b) $t_0 = \pi/2$. Esboce o gráfico da elipse juntamente com os dois círculos encontrados.