Nome:____

Geometria Diferencial I

Prova 2 - 07/05/2018

1. (2,5 pts) Considere a curva

$$\beta(s) = (a(\cos(as) + \operatorname{sen}(as)), a(\operatorname{sen}(as) - \cos(as)), as)\,, \quad \text{com} \quad a = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

   (a) Mostre que $\beta(s)$ é uma hélice, encontrando a sua curvatura e a sua torsão.

   (b) Encontre uma isometria F de $\mathbb{R}^3$ tal que $F(\alpha) = \beta$, onde α é a hélice $\alpha(s) = (cos(as), \operatorname{sen}(as), as)$, e descreva a ação da parte ortogonal de F.

   Dado: Em $s = 0$, o referencial de Frenet de α é dado por:

$$T_\alpha(0) = (0, a, a)\,,\ N_\alpha(0) = (-1, 0, 0)\,,\ B_\alpha(0) = (0, -a, a)\,.$$

2. (2,5pts) Seja F uma isometria de $\mathbb{R}^3$. Para cada campo vetorial V seja $\overline{V}$ o campo vetorial tal que $F_*(V(\mathbf{p})) = \overline{V}(F(\mathbf{p}))$ para todo $\mathbf{p}$. Prove que as isometrias preservam as derivadas covariantes; ou seja, mostre que $\overline{\nabla_V W} = \nabla_{\overline{V}}\overline{W}$.

3. Usando a definição de superfície, faça o que é pedido:

   (a) Prove que $M : (x^2 + y^2)^2 + 3z^2 = 1$ é uma superfície

   (b) Determine os valores de c para os quais $M : z(z-2) + xy = c$ é uma superfície.

4. (2,5pts) Seja $\mathbf{x} : R \to M$ um 2-segmento definido no retângulo $0 \le u \le \pi/2$, $0 \le v \le \pi$. Se ϕ é a 1-forma em M tal que

$$\phi(\mathbf{x}_u) = u\cos v \quad \text{e} \quad \phi(\mathbf{x}_v) = v \operatorname{sen} u\,,$$

   calcule $\iint_{\mathbf{x}} d\phi$ e $\int_{\partial x} \phi$ separadamente e verifique o teorema de Stokes.

   EXTRA

5. (1,0pt) Se Σ é a esfera $||\mathbf{p}|| = r$, a aplicação $A : \Sigma \to \Sigma$ tal que $A(\mathbf{p}) = -\mathbf{p}$ é chamada a *aplicação antipodal* de Σ. Prove que A é um difeomorfismo e que $A_*(\mathbf{v}_p) = (-\mathbf{v})_{-p}$.