

**Pesquisando Desde o Primeiro Dia**

**Relatório Parcial**

## **Introdução às Ondas Gravitacionais**

**Aluna:** Amanda Schwartzmann

11001116

schwartzmann.a@aluno.ufabc.edu.br

**Nome da orientadora:** Cecilia Bertoni Martha Hadler Chirenti

cecilia.chirenti@ufabc.edu.br

Santo André, São Paulo

2017

## **Resumo**

Este relatório apresenta o que foi realizado até o momento no projeto. Foi feita uma revisão de física básica e visualização do centro de massa de um sistema de partículas. A partir de agora, deverá ser feita a determinação numérica do centro de massa de um corpo extenso e também serão estudados os conceitos de expansão multipolar e momento de quadrupólo.

## **Abstract**

This report presents what has been made until the moment in the project: a review of basic physics, as well as the visualization of the center of mass of a system of particles. In the next steps, the center of mass of an extensive body must be numerically determined and the concepts of multipolar expansion and quadrupole moment must be studied.

# Sumário

1. Introdução.....	4
1.1 Gravitação Newtoniana .....	4
1.2 Relatividade Especial e Geral .....	4
1.3 Ondas gravitacionais .....	5
1.4 Detectores de ondas gravitacionais.....	6
2. Objetivos .....	6
3. Metodologia.....	7
3.1 Material.....	7
3.2 Métodos.....	7
4. Resultados e discussão.....	7
4.1 Lebre e tartaruga.....	8
4.2 Movimento balístico .....	9
4.3 Centro de massa de um sistema de partículas .....	10
4.3.1 Equação do centro de massa de um sistema de partículas .....	10
4.4.2 Visualização em duas dimensões.....	11
4.4.3 Visualização em três dimensões .....	13
4.4 Centro de massa de um corpo extenso .....	15
5. Cronograma.....	15
6. Conclusões .....	16
Referências.....	17
Apêndice A – Código da simulação 2D .....	18
Apêndice B – Código da simulação 3D .....	20

# 1. Introdução

## 1.1 Gravitação Newtoniana

Ao estudar gravitação, estamos considerando uma das quatro interações fundamentais: a força gravitacional, que tem o maior alcance e menor intensidade entre elas. Devido a essas duas características, a força gravitacional sempre foi compreendida em escala astronômica e seu entendimento está ligado à história da astronomia [1].

Isaac Newton (1642-1727) foi o principal nome responsável pelo entendimento da gravitação como a vemos hoje; apesar de mais tarde ter havido correções relativísticas aos conceitos, com Albert Einstein, seus estudos são de grande utilidade e usados até os dias atuais [1].

A lei da gravitação para órbitas circulares afirma que um corpo que orbita outro devido à força gravitacional exerce uma força sobre ele que pode ser descrita pela equação

$$\mathbf{F} = -G \frac{mM}{R^2} \hat{r} \quad (1)$$

onde  $G$  é a constante gravitacional,  $m$  e  $M$  as massas dos dois corpos,  $R$  o raio da distância entre eles e  $\hat{r}$ , o versor representante da dimensão na qual o estudo é feito [1].

Assim, Newton, por meio de suas ideias sobre a gravitação, além de suas contribuições em outras áreas, como o cálculo, contribuiu enormemente com a ciência, sendo considerado por Hume o maior gênio que a civilização já conheceu. De fato, a era pós-newtoniana foi marcada por sucessos na aplicação de seus princípios de dinâmica e gravitação [1].

## 1.2 Relatividade Especial e Geral

Durante mais de 200 anos, as equações de Newton foram usadas para descrever o movimento. Em 1905, Albert Einstein (1897-1955) descobriu um erro em tais equações: basicamente, a massa dos corpos não é sempre constante, e

sim pode ser alterada de acordo com a velocidade deles; assim, a Teoria da Relatividade corrige as leis de Newton introduzindo o seguinte fator de correção à massa:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (2)$$

onde  $m_0$  representa a massa do mesmo corpo quando não está em movimento e  $c$  é a velocidade da luz, que de acordo com a Relatividade se mantém constante independentemente do observador [2].

Esse princípio enuncia a Teoria da Relatividade Especial, que introduz o tempo como uma quarta dimensão, juntamente com as três do espaço. Deste modo, utiliza-se o conceito de espaço-tempo, onde um ponto tem coordenadas  $(x, y, z, t)$  e é chamado de evento. A Relatividade Geral, publicada em 1915, considera também movimentos acelerados [2].

Um problema nas leis de Newton que foi solucionado com a Relatividade Geral era o da velocidade com que o efeito gravitacional se propaga. Newton havia determinado a intensidade e direção da força da gravidade, mas a rapidez da propagação era dada como infinita, ou seja, a gravidade era transmitida instantaneamente. Como será mostrado, Einstein demonstrou que, na verdade, tal efeito se propagava na velocidade da luz [4].

### 1.3 Ondas gravitacionais

A física das ondas gravitacionais está numa época extremamente propícia. Em 2016, foi realizada a primeira detecção direta de tais ondas no LIGO, um marco definitivo para o desenvolvimento da astronomia de ondas gravitacionais, um rico assunto que junta diferentes áreas como a relatividade geral, teoria de campos, astrofísica e cosmologia [3].

Previstas em 1916 por Albert Einstein como uma consequência matemática da Teoria da Relatividade Geral, as ondas gravitacionais, de forma resumida, são variações no espaço-tempo causadas por campos gravitacionais variáveis, causados por massa ou energia. Sua propagação ocorre com a velocidade da luz e sua detecção indireta rendeu o Nobel de Física de 1993 [4].

Assim como as equações de Maxwell permitem a existência de ondas propagadas no campo eletromagnético, a Relatividade Geral prevê que flutuações na métrica do espaço-tempo podem ser propagadas como ondas gravitacionais [5]. Elas são caracterizadas por apenas quatro grandezas: comprimento de onda, amplitude, polarização e direção de propagação [4].

## **1.4 Detectores de ondas gravitacionais**

Em 2016, houve pela primeira vez a detecção direta das ondas gravitacionais, marcando-as como a última previsão da Relatividade Geral a ser confirmada [5].

Detectores de ondas gravitacionais geralmente usam o método de interferometria a laser, que funciona do seguinte modo: a luz em forma de laser é dividida e direcionada por dois “braços”. Em seguida, duas massas-teste iguais refletem a luz no final dos braços e a luz refletida é recombinaada. As franjas de interferência geradas pelas duas luzes são analisadas em procura de evidências indicando mudanças nas distâncias das massas-teste, o que confirmaria a variação no espaço-tempo. Os braços têm muitos quilômetros de extensão, pois a variação nas distâncias gerada pelas ondas gravitacionais é extremamente pequena (da ordem de  $10^{-21}$  vezes o tamanho original do objeto medido), sendo necessária tal extensão para que elas sejam detectadas [5].

Também há o método de massas ressonantes, onde, por exemplo, uma barra cilíndrica de alumínio extremamente isolada do meio externo é equilibrada no meio de um cabo. Cristais piezoelétricos, que produzem voltagem elétrica quando deformados, são colocados na superfície da barra. Assim, quando a onda chega na barra, há oscilação longitudinal causando mudança na extensão dos cristais, que emitem sinais elétricos [4].

## **2. Objetivos**

Os objetivos deste trabalho estão relacionados principalmente com a determinação do momento de quadrupólo de uma configuração de massa. Espera-se que a aluna candidata seja capaz de cumprir os seguintes objetivos:

- Determinar numericamente o centro de massa e o momento de quadrupólo de uma configuração de massa
- Utilizar um programa gráfico para a visualização dos resultados no computador
- Entender a fórmula de quadrupólo usada para calcular a emissão de ondas gravitacionais de um sistema binário
- Pesquisar sobre os detectores de ondas gravitacionais existentes e em planejamento
- Implementar a instalação do programa Einstein@Home

### **3. Metodologia**

#### **3.1 Material**

O material necessário para a execução deste projeto inclui recursos computacionais modestos, incluindo um compilador, um editor de Latex e um programa gráfico para a visualização das simulações. O material bibliográfico básico necessário está disponível na biblioteca da UFABC.

#### **3.2 Métodos**

Até o momento, foi utilizada a bibliografia para o estudo de física básica e conceitos como o momento de quadrupólo e ondas gravitacionais. Os principais livros são: Curso de Física Básica vol. 1 – Mecânica, de H. Moysés Nussenzveig [1], Lições de Física vol. 1, de Richard Feynman [2], utilizado para a introdução teórica aos conceitos físicos, e Ondas Gravitacionais vol. 1, de Michele Maggiore [3]. Alguns exercícios da bibliografia foram resolvidos e estão exemplificados neste relatório (item 4). Também foi utilizado o software MATLAB para a visualização do centro de massa de um sistema de partículas.

### **4. Resultados e discussão**

Dois exercícios do livro Curso de Física Básica vol. 1 – Mecânica estão resolvidos e comentados nos itens 4.1 e 4.2. As resoluções são fundamentais

para a compreensão de conceitos e problemas envolvendo mecânica. No item 4.3, há a apresentação das simulações de centro de massa de um sistema de partículas, cujos códigos utilizados encontram-se nos apêndices A e B.

#### 4.1 Lebre e tartaruga

*Na célebre corrida entre a lebre e a tartaruga, a velocidade da lebre é de 30 km/h e a da tartaruga é de 1,5m/min. A distância a percorrer é de 600m, e a lebre corre durante 0,5min antes de parar para uma soneca. Qual é a duração máxima da soneca para que a lebre não perca a corrida?*

Primeiramente identificamos os dados do problema e o que pede-se:

$$\Delta x = 600 \text{ m};$$

$$v_{\text{lebre}} = 30 \text{ km/h} = 8,33333\dots \text{ m/s};$$

$$v_{\text{tartaruga}} = 1,5 \text{ m/min} = 0,025 \text{ m/s};$$

$$\Delta t = 0,5 \text{ min} = 30 \text{ s};$$

$$t_{\text{soneca}} = ?$$

Para a resolução, utilizamos apenas a equação da distância em função do tempo, uma vez que o movimento é uniforme:

$$\Delta x = vt . \quad (3)$$

Assim, o tempo que cada um gasta para percorrer  $\Delta x$  é dado por:

$$\Delta t_{\text{lebre}} = \frac{\Delta x}{v_{\text{lebre}}} \text{ e} \quad (4)$$

$$\Delta t_{\text{tartaruga}} = \frac{\Delta x}{v_{\text{tartaruga}}} . \quad (5)$$

Assim,  $t_{\text{lebre}} = 72 \text{ s}$  e  $t_{\text{tartaruga}} = 2,4 \cdot 10^4 \text{ s}$ .

Para que a lebre ganhe, o tempo que leva para percorrer  $\Delta x$  mais o tempo da soneca deve ser igual ao tempo que a tartaruga leva para percorrer  $\Delta x$ . Assim,



$$t_{lebre} + t_{soneca} = t_{tartaruga} \quad (6)$$

E encontramos  $t_{soneca} = 2,3928 \cdot 10^4$  s, que corresponde a  $6,647$  h = 6h 38 min 49 s.

## 4.2 Movimento balístico

*Um projétil é disparado num ângulo de  $35^\circ$  com a horizontal. Ele atinge o solo a 4 km do ponto do disparo. Calcular (a) o módulo da velocidade inicial, (b) o tempo de trânsito do projétil, (c) a altura máxima, (d) o módulo da velocidade no ponto de altura máxima.*

Identificando os dados do problema:

$$\Delta x = 4 \text{ km} = 4000 \text{ m};$$

$$\theta = 35^\circ.$$

### (a) Módulo da velocidade inicial

Podemos utilizar as seguintes equações:

$$\Delta t = \frac{2v_0 \sin \theta}{g} \quad \text{e} \quad (7)$$

$$\Delta x = (v_0 \cos \theta) \Delta t. \quad (8)$$

Substituindo:

$$\Delta x = (v_0 \cos \theta) \frac{2v_0 \sin \theta}{g}, \quad (9)$$

obtém-se o valor de  $v_0 = 204$  m/s.

### (b) Tempo de trânsito

Da equação (7) obtém-se 23,7 s.

### (c) Altura máxima

Como a altura máxima ocorre em  $\Delta t/2$ , utilizamos a seguinte equação:

$$y(\Delta t/2) = (v_0 \sin \theta)(\Delta t/2) - \frac{1}{2}g(\Delta t/2)^2, \quad (10)$$

de onde obtém-se 670 m.

#### (d) Módulo da velocidade na altura máxima

Na altura máxima, o componente  $v_y$  é anulado. Assim, sobra apenas  $v_x$ :

$$v_x = v \cos 35^\circ = 167 \text{ m/s.}$$

### 4.3 Centro de massa de um sistema de partículas

Primeiramente será apresentada a equação para o cálculo do centro de massa de um sistema de  $N$  partículas; também serão visualizadas diferentes configurações em duas e três dimensões para o centro de massa. Também será apresentada a equação para o centro de massa de um corpo extenso e o conceito e equação do momento de quadrupolo.

#### 4.3.1 Equação do centro de massa de um sistema de partículas

Para um sistema de  $N$  partículas dispostas em posições ao longo dos eixos cartesianos, é necessário calcular a posição do centro de massa para cada eixo. Para isso, podemos tratar o sistema como se fosse uma só partícula, de momento igual ao momento total do sistema e sobre a qual atua a resultante das forças externas. Essa posição é exatamente o centro de massa do sistema.

Nesse sistema há  $N$  partículas, de massas  $m_1, m_2, \dots, m_N$ , cujos vetores de posição são  $r_1, r_2, \dots, r_N$ . A equação que dá o vetor de posição do centro de massa desse sistema é:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + \dots + m_N \mathbf{r}_N}{m_1 + m_2 + \dots + m_N}, \quad (11)$$

sendo  $M$  a massa total do sistema.

Como exemplo tomamos o eixo  $x$ , onde a posição  $x$  do centro de massa,  $x_{CM}$ , é calculada do seguinte modo:

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i x_i = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_N x_N}{m_1 + m_2 + \dots + m_N}. \quad (12)$$

Assim procedemos para cada eixo, encontrando por fim as coordenadas completas do centro de massa [1].

#### 4.4.2 Visualização em duas dimensões

Para a visualização do centro de massa de um sistema de partículas em duas dimensões, foi utilizado o software MATLAB.

Primeiramente, foi criada uma situação com 20 partículas, todas com a mesma massa de 1kg cada, dispostas uniformemente em posições espaçadas ao longo das funções  $f(x) = x$  e  $f(x) = 1-x$ , como mostrado na figura 1. A posição de coordenadas  $(0.5,0.5)$  não foi preenchida com corpos, para otimizar a visualização do centro de massa, que se encontra exatamente nessa posição, como esperado devido à distribuição uniforme dos corpos de mesma massa.

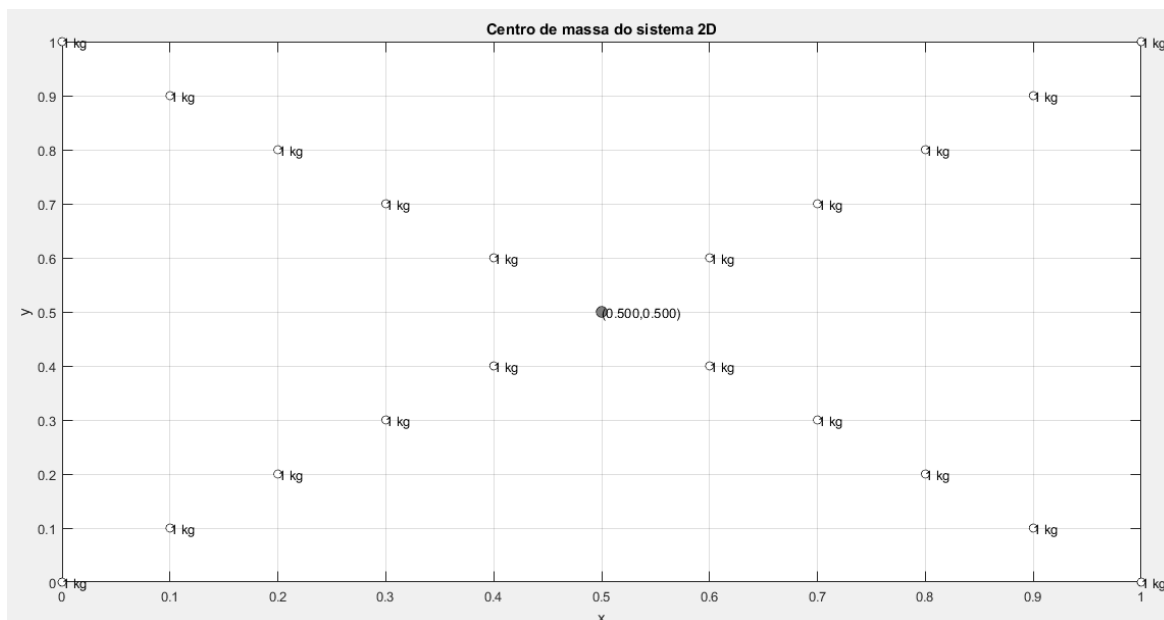


Figura 1: Gráfico do centro de massa em duas dimensões (caso 1)

A segunda simulação foi feita com 21 partículas, sendo 20 nas mesmas posições da primeira simulação e a adição de uma na posição  $(0.5,0.5)$ . A diferença foi expressa nas massas de cada corpo, que são crescentes ao longo do eixo x, com as massas em  $x = 0$  tendo 1kg, em  $x = 0,1$  tendo 2kg e assim por diante, até chegar a 11kg em  $x = 1$ , como mostrado na figura 2. Podemos observar um deslocamento do centro de massa para a direita, permanecendo em  $(0.675,0.5)$ , assim como esperado, pois os corpos à direita têm maiores massas;

a posição y do centro de massa não se alterou devido à uniformidade das massas ao longo do eixo y, isto é, para cada massa acima de  $y=0,5$  havia uma abaixo dessa posição, compensando-a.

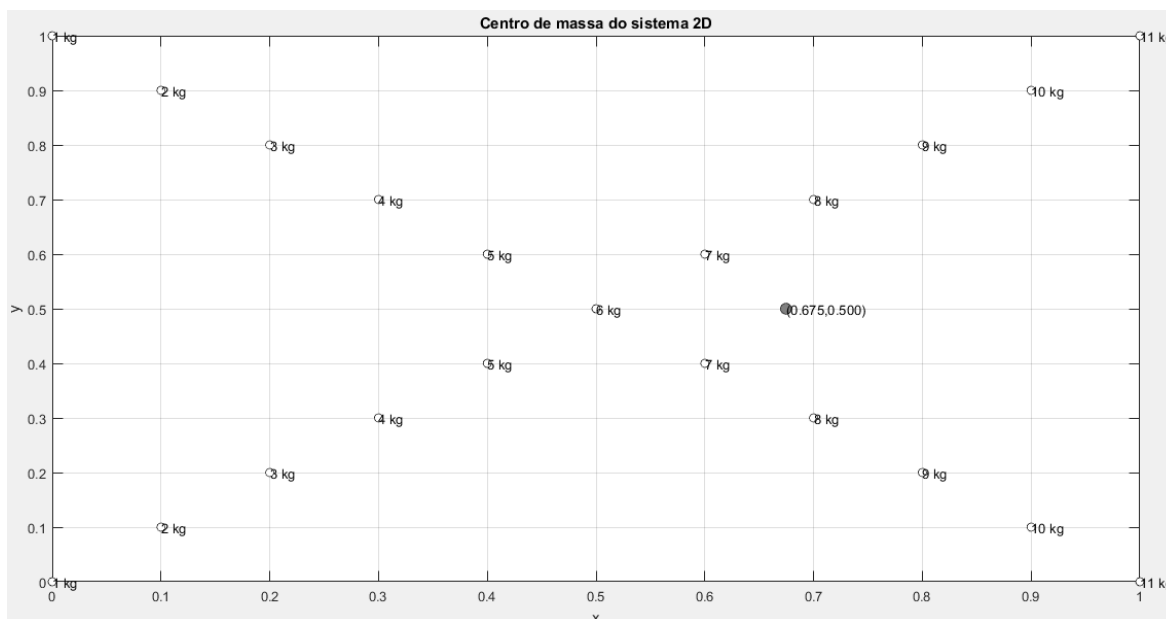


Figura 2: Gráfico do centro de massa em duas dimensões (caso 2)

A terceira simulação foi feita utilizando-se 21 pontos ao longo da função  $f(x) = x^2$ . Cada ponto foi colocado ao longo da reta x com 0.05 de distância do próximo, começando em  $x = 0$  e terminando em  $x = 1$  (figura 3). As massas dos pontos aumentam ao longo do eixo x, cada ponto tendo 1kg a mais que o anterior; desse modo, a massa do ponto de coordenadas  $(0,0)$  é 1kg e a do corpo de coordenadas  $(1,1)$ , 21kg. Pôde-se observar o centro de massa na posição  $(0,667, 0,508)$ .

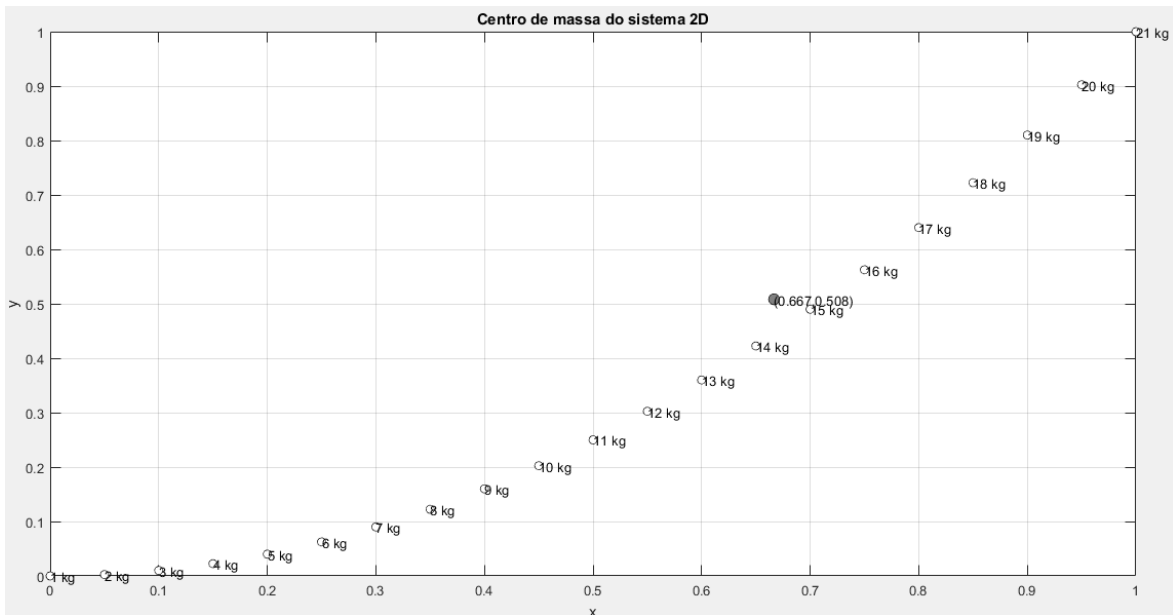


Figura 3: Gráfico do centro de massa em duas dimensões (caso 3)

#### 4.4.3 Visualização em três dimensões

A primeira visualização foi feita utilizando-se as oito combinações diferentes que pode-se fazer com as posições 0 e 1:  $(0,0,0)$ ;  $(1,1,1)$ ;  $(1,0,0)$ ;  $(0,1,0)$ ;  $(0,0,1)$ ;  $(1,1,0)$ ;  $(0,1,1)$ ;  $(1,0,1)$ . Todas as massas foram iguais a 1 kg. Assim, o centro de massa manteve-se no centro, em  $(0.5,0.5,0.5)$ , como esperado (figura 4).

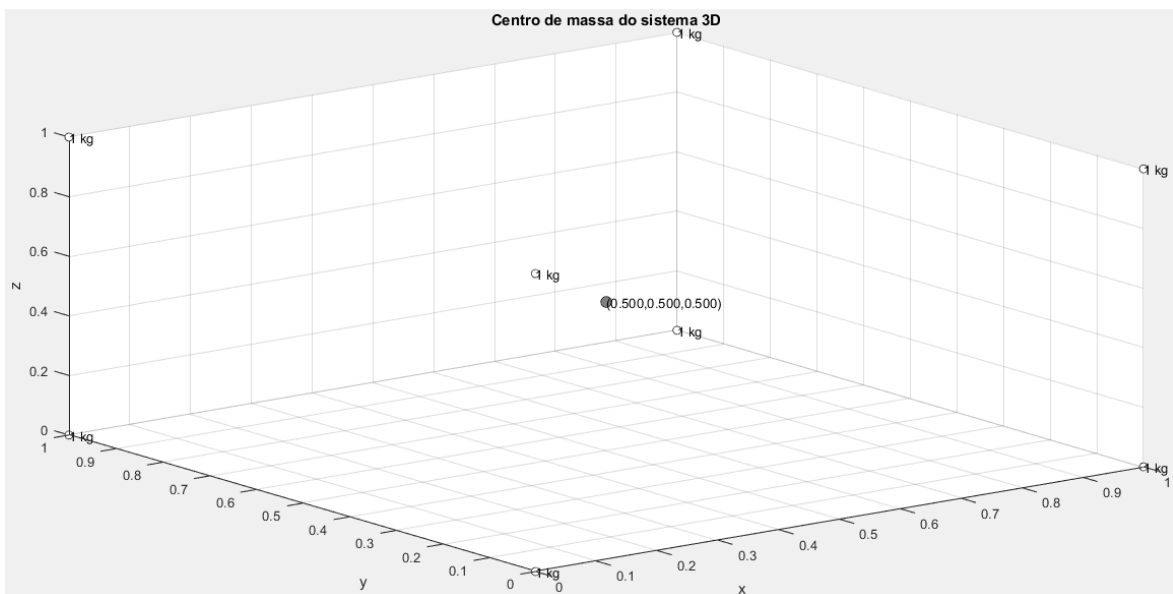


Figura 4: Gráfico do centro de massa em três dimensões (caso 1)

Na segunda simulação, mostrada na figura 5, foram utilizadas as mesmas posições porém com massas variando de 1 a 8, distribuídas aleatoriamente. Pôde-se observar uma posição do centro de massa ainda próxima do centro.

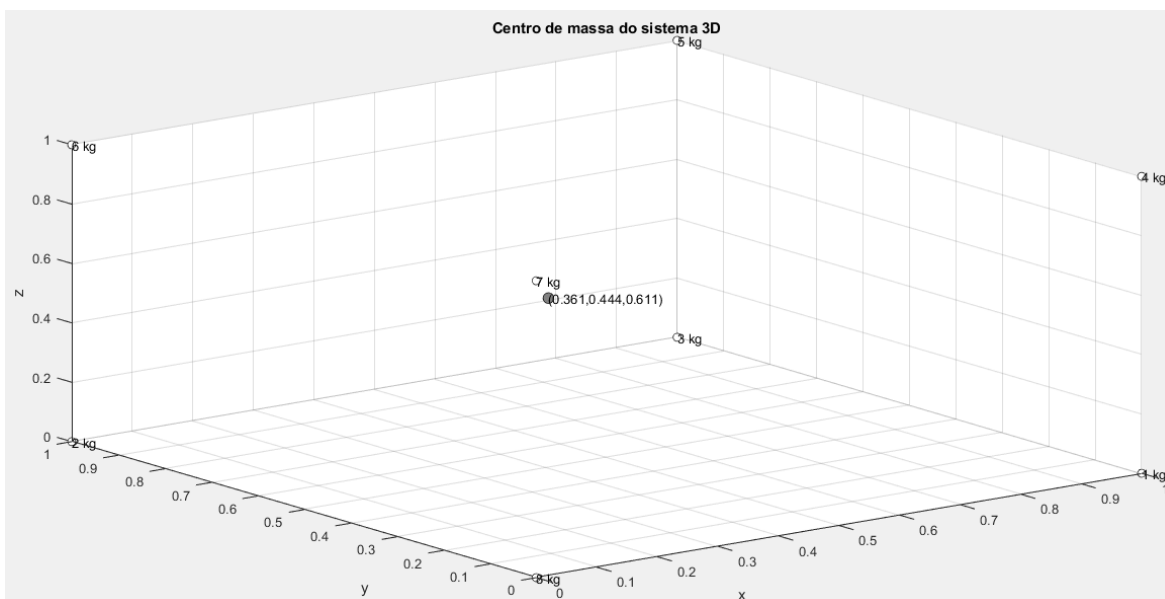


Figura 5: Gráfico do centro de massa em três dimensões (caso 2)

Na última simulação (figura 6), utilizou-se 11 valores, todos com  $x = y = z$ , variando de 0 a 1 e com intervalos de 0,1. As massas foram aumentadas em 1kg a cada valor e o centro de massa manteve-se coerente a esse fato, sobre a reta  $x = y = z$ .

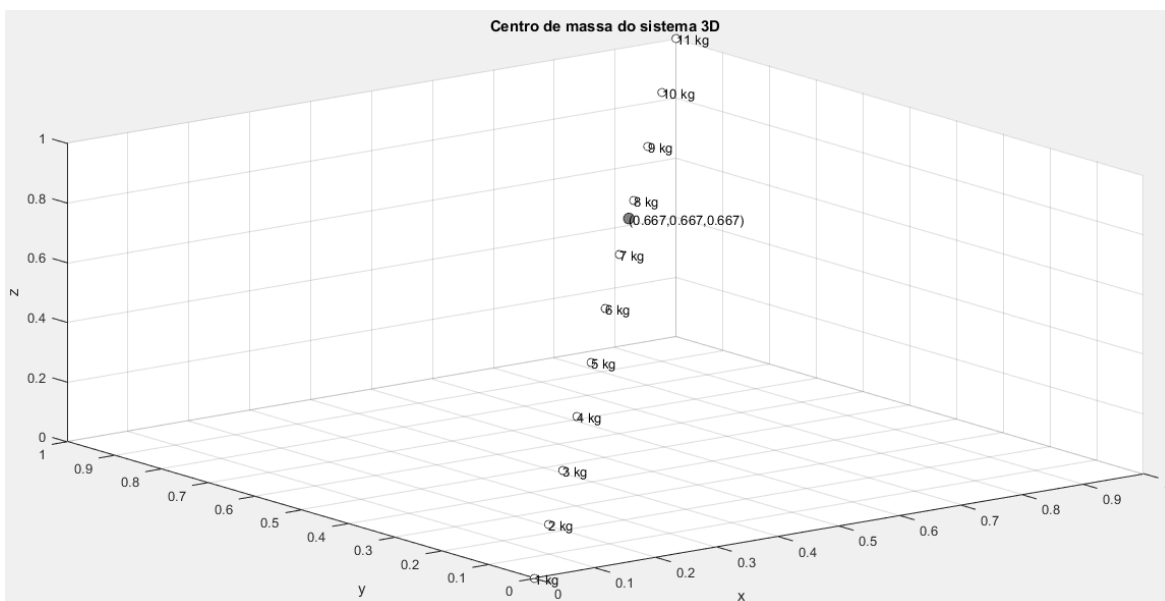


Figura 6: Gráfico do centro de massa em três dimensões (caso 3)

## 4.4 Centro de massa de um corpo extenso

Para a determinação do centro de massa de um corpo extenso, podemos pensar no corpo como um sistema de partículas. Decompondo este corpo em um número de partes, é possível pensar no caso em que o volume  $\Delta V_i$  de cada parte  $i$  é suficientemente pequeno e, assim, há um número muito grande de partes. Assim, cada parte pode ser representada por uma partícula de vetor posição  $\mathbf{r}_i$ , sendo o vetor posição do centro de massa dado por

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_i (\Delta m_i) \mathbf{r}_i}{\sum_i \Delta m_i} . \quad (13)$$

Quando o número de divisões tende a infinito e  $\Delta m_i$  tende a zero, temos

$$\mathbf{R} = \frac{\int \mathbf{r} dm}{\int dm} , \quad (14)$$

Sendo assim possível calcular o centro de massa em cada dimensão [1].

## 5. Cronograma

Este projeto possui a duração de 10 meses, de 01/10/2016 a 31/07/2017. O projeto deverá ser desenvolvido de acordo com o seguinte cronograma:

**01/10/2016 a 30/11/2016** Revisão de física básica. Determinação do centro de massa de um sistema de partículas. Determinação numérica do centro de massa de um corpo extenso. Visualização.

**01/12/2016 a 31/01/2017** Conceito básico de expansão multipolar. Determinação do momento de quadrupólo de diferentes configurações.

**01/02/2017 a 31/03/2017** Revisão da literatura: sistemas binários e fórmula do quadrupólo para emissão de ondas gravitacionais. Elaboração do relatório parcial.

**01/04/2017 a 31/05/2017** Utilização da fórmula do quadrupólo para prever as características das ondas gravitacionais de um sistema binário. Visualização.

**01/06/2017 a 31/07/2017** Revisão da literatura: detectores e detecções já realizadas. Instalação do Einstein@Home. Elaboração do relatório Final.

O projeto está ainda na primeira parte, tendo sido completada a revisão de física básica e determinação e visualização do centro de massa de um sistema de partículas. Nos próximos meses, o projeto deverá ser feito com maior foco e acelerado para que o cronograma possa ser colocado em dia novamente.

## **6. Conclusões**

Durante o desenvolvimento do projeto, pôde-se estudar diversos conceitos de mecânica, física clássica e alguns aspectos qualitativos da relatividade. Além disso, foram absorvidos conhecimentos de cálculo e matemática em geral.

Também foi usada programação para desenvolver o código das simulações, que a partir de agora deverão ser extendidas para mais casos e situações.



## Referências

- [1] NUSSENZVEIG, H. Moysés. Curso de física básica: vol.1, mecânica. 5. ed. São Paulo, SP: Blucher, c2013. v. 1 . 394 p., il.
- [2] FEYNMAN, Richard Phillips; LEIGHTON, Robert B.; SANDS, Matthew. Feynman: lições de Física. Tradução de Adriana Válio Roque da Silva et al. Porto Alegre, RS: Bookman, 2008. 1 v., il.
- [3] MAGGIORE, Michele. Gravitational waves, vol. 1: theory and experiments. Oxford, GBR: Oxford University Press, c2008. xvii, 554.
- [4] AGUIAR, Odylio D. História da Astronomia no Brasil. Recife, PE: Cepe Editora e Secretaria de Ciência e Tecnologia de Pernambuco, 2014.
- [5] GUIDRY, Michael W. Online journey through Astronomy. Brooks Cole, 2004.

## Apêndice A – Código da simulação 2D

```
1 fprintf('Cálculo do centro de massa para sistema de
partículas\n\n');
2 num=input('Insira quantas massas temos no sistema: ');
3 mas=1:1:num;
4 posi=zeros(num,2);
5 %input dos dados
6 i=1;
7 while i<=num
8     mas(i)=input('Insira a massa em kg: ');
9     posi(i,1)=input('Insira a posição x da massa: ');
10    posi(i,2)=input('Insira a posição y da massa: ');
11    i=i+1;
12 end
13 % calculando massa total do sistema
14 mastotal=0;
15 i=1;
16 while i<=num
17     mastotal=mastotal+mas(i);
18     i=i+1;
19 end
20 % x do centro de massa
21 x=0;
22 i=1;
23 while i<=num
24     x=x+posi(i,1)*mas(i);
25     i=i+1;
26 end
27 x=x/mastotal;
28 % y do centro de massa
29 y=0;
30 i=1;
31 while i<=num
32     y=y+posi(i,2)*mas(i);
33     i=i+1;
```

```

34 end
35 y=y/mastotal;
36 %plotagem para visualização
37 plot(x,y,'o','MarkerEdgeColor','k','MarkerFaceColor',[.5 .5
    .5],'MarkerSize',8) %centro de massa
38 grid on
39 txt1 = sprintf('(%3f,%3f)',x,y);
40 text(x,y,txt1);
41 hold on
42 title('Centro de massa do sistema 2D');
43 ylabel('y');
44 xlabel('x');
45 i=1;
46 while i<=num
47
    plot(posi(i,1),posi(i,2),'o','MarkerEdgeColor','k','MarkerF
        aceColor',[1 1 1],'MarkerSize',6) %massas
48     txt1 = sprintf('%d kg',mas(i));
49     text(posi(i,1),posi(i,2),txt1);
50     i=i+1;
51 end
52 %fim

```

## Apêndice B – Código da simulação 3D

```
1 fprintf('Cálculo do centro de massa para sistema de
partículas\n\n');
2 num=input('Insira quantas massas temos no sistema: ');
3 mas=1:1:num;
4 posi=zeros(num,3);
5 %input dos dados
6 i=1;
7 while i<=num
8     mas(i)=input('Insira a massa em kg: ');
9     posi(i,1)=input('Insira a posição x da massa: ');
10    posi(i,2)=input('Insira a posição y da massa: ');
11    posi(i,3)=input('Insira a posição z da massa: ');
12    i=i+1;
13 end
14 % calculando massa total do sistema
15 mastotal=0;
16 i=1;
17 while i<=num
18     mastotal=mastotal+mas(i);
19     i=i+1;
20 end
21 % x do centro de massa
22 x=0;
23 i=1;
24 while i<=num
25     x=x+posi(i,1)*mas(i);
26     i=i+1;
27 end
28 x=x/mastotal;
29 % y do centro de massa
30 y=0;
31 i=1;
32 while i<=num
33     y=y+posi(i,2)*mas(i);
```

```

34     i=i+1;
35 end
36 y=y/mastotal;
37 % z do centro de massa
38 z=0;
39 i=1;
40 while i<=num
41     z=z+posi(i,3)*mas(i);
42     i=i+1;
43 end
44 z=z/mastotal;
45 %plotagem para visualização
46 plot3(x,y,z,'o','MarkerEdgeColor','k','MarkerFaceColor',[.5
    .5 .5],'MarkerSize',8) %centro de massa
47 grid on
48 txt1 = sprintf(' (%.3f,%.3f,%.3f) ',x,y,z);
49 text(x,y,z,txt1);
50 hold on
51 title('Centro de massa do sistema 3D');
52 ylabel('y');
53 xlabel('x');
54 zlabel('z');
55 i=1;
56 while i<=num
57
    plot3(posi(i,1),posi(i,2),posi(i,3),'o','MarkerEdgeColor','
    k','MarkerFaceColor',[1 1 1],'MarkerSize',6) %massas
58     txt1 = sprintf('%d kg',mas(i));
59     text(posi(i,1),posi(i,2),posi(i,3),txt1);
60     i=i+1;
61 end
62 %fim

```