

Universidade Federal do ABC  
Graduação em Ciência e Tecnologia

Anderson Carlos dos Santos

VISUALIZAÇÃO E ESTUDO DE WARP DRIVE E WORMHOLES

Relatório Parcial de Iniciação Científica - PIBIC

Santo André – SP

2014

Anderson Carlos dos Santos

VISUALIZAÇÃO E ESTUDO DE WARPDRIVE E WORMHOLES

Relatório Parcial de Iniciação Científica - PIBIC

Relatório parcial do projeto de iniciação científica apresentado à Universidade Federal do ABC, como requisito para obtenção do certificado.

Orientadora: Prof(a). Dr(a). Cecilia B. M. H. Chirenti

Santo André – SP

2014

## Resumo

Os buracos de minhoca (wormholes) e a dobra espacial (warp drive) são duas especulações físicas que podem permitir, em futuro distante, viagens com velocidades muito superiores as possíveis hoje. Ambas as teorias foram desenvolvidas após a Relatividade Geral de Einstein e seguem seu princípio. No entanto, o desenvolvimento dessas tecnologias ainda possuem impedimentos físicos, sendo possível apenas através de simulações matemáticas. O estudo e a visualização de ambas teorias podem proporcionar grandes desenvolvimentos tecnológicos assim como nortear qual método pode representar a melhor maneira de driblar a velocidade da luz

Palavras Chaves: Astrofísica, Relatividade, Transporte, Velocidade.

## Abstract

Wormholes and warp are two physical speculations that can enable in the distant future, travel at speeds much higher than possible today. Both theories were developed after Einstein's General Relativity and follow its principle. However, the development of these technologies still have physical impairments, being possible only through mathematical simulations. The study and visualization of both theories can provide major technological developments as well as guide which method may represent the best way to circumvent the speed of light.

Key words: Astrophysics, Relativity, Transportation, Speed.

## Sumário

1. Introdução.....	4
2. Objetivo .....	5
3. Metodologia.....	5
4. Desenvolvimento e Resultados.....	7
4.1 Solução específica do wormhole .....	8
4.2 Matéria Exótica.....	10
4.3 Geodésicas .....	12
5. Conclusão .....	22
6. Cronograma .....	22
7. Referências .....	22

## 1. Introdução

A teoria da Relatividade Geral proposta por Einstein em 1915 é a melhor forma de descrever o universo em grandes escalas. Desde que foi proposta o entendimento do universo foi ampliado e suas equações revelaram fenômenos nunca antes imaginados.

A velocidade da luz tem um papel fundamental desde a teoria da Relatividade Restrita. Segundo Einstein sua velocidade seria o máximo absoluto permitido pelo universo, e teria o mesmo valor em qualquer referencial. Essa afirmação foi crucial para a revolução no entendimento de tempo que temos hoje, de algo que se pode variar, assim como o espaço e criando o espaço-tempo.

Contudo, mesmo a velocidade da luz sendo extremamente rápida para os nossos padrões diários, ela não é suficiente para se locomover “rapidamente” pelo universo. Distância astrofísica citam frequentemente dezenas, milhares e milhões de anos luz de distância o que seria impossível viajar pelo universo.

Assim, novos modelos de transporte pelo universo foram propostos com a intenção de driblar a limitação da velocidade da luz imposta. Os modelos citados envolvem soluções exóticas como o wormhole e o warp drive. Embora sua aplicação não seja útil em um futuro próximo o estudo de tais soluções pode ser um fator de extrema importância para um desenvolvimento em longo prazo.

Wormholes são objetos de estudo matemáticos relativísticos precedentes dos buracos negros. Após apenas um ano da formulação das equações de campo de Einstein, Ludwig Flamm reorganizou a solução de Schwarzschild representando um wormhole. Outros buracos de Schwarzschild foram estudados por Einstein e Nathan Rosen nos anos de 1930 e por John Wheeler nos anos de 1950.<sup>[1]</sup>

No entanto os wormholes de Schwarzschild apresentam características que descartam a possibilidade de viagens interestelares, como:

- (1) As Forças de Maré na garganta do wormhole de Schwarzschild são de mesma magnitude do interior de um buraco negro. O que faria que qualquer viajante morresse ao tentar atravessá-lo.
- (2) Um wormhole de Schwarzschild seria dinâmico e não estático. O que faria com que sua garganta abrisse e fechasse em curtos intervalos de tempos que nem mesmo na

velocidade da luz alguém seria capaz de atravessá-lo sem escapar da gravidade de maré.

(3) O wormhole de Schwarzschild seria muito instável.

O wormhole proposto por Morris e Thorne representa uma curvatura no espaço-tempo de acordo com as equações de Einstein. Na “garganta” de um wormhole deve haver um material que exerça uma tensão radial  $\tau_0$  de grande magnitude. No entanto essa tensão deve exceder o limite usual de densidade de massa-energia da matéria comum,  $\rho_0 c^2$ .<sup>[1]</sup> Esse efeito viola as condições de energia conhecida, denominando-se exótica a matéria cujo seja necessária para sua criação. Nos dias atuais não é possível afirmar com certeza a existência desse material, contudo a teoria quântica apresenta resultados que dizem que tal material pode ser, de fato, possível. <sup>[1]</sup> No trabalho, no entanto, não será discutida a natureza quântica da matéria.

## 2. Objetivo

O objetivo final do projeto é analisar as soluções do wormhole de Morris-Thorne e o warp drive de Miguel de Alcubierre e por meio das análises utilizadas sugerir qual a melhor opção de se conseguir viagens mais rápidas do que a velocidade da luz.

## 3. Metodologia

O wormhole transitável foi proposto por Michael S. Morris e Kip S. Thorne em 1988. Para sua construção partimos de condições necessárias e superando as limitações ocorrentes nos wormholes de Schwarzschild, sendo as:

- (1) Possuir uma métrica com simetria esférica e estática, para simplificação dos cálculos;
- (2) A solução deve obedecer às equações de campo de Einstein;
- (3) A garganta da solução do wormhole deve conectar duas regiões assintoticamente do espaço-tempo plano;
- (4) Não deve haver nenhum horizonte de eventos;

- (5) As forças de maré devem ser suficientemente pequenas para que um viajante possa atravessá-lo e sobreviver;
- (6) Um viajante deve ser capaz de atravessar o wormhole e voltar em um intervalo de tempo suficiente para que possa realizar contato com o observador que ficou parado do lado de fora do wormhole;
- (7) A solução deve ser estável, ao menos para a passagem de uma espaçonave;
- (8) Possibilidade de montar um wormhole, por exemplo: exigir menos matéria do que disponível em todo universo ou energia;
- (9) A matéria do campo gerado pela curvatura do espaço-tempo do wormhole deve ser fisicamente relacionada ao tensor de energia-momento.

Em posse dos requerimentos, podemos construir a seguinte métrica:

$$ds^2 = -e^{2\Phi} c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{b}{r}} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2). \quad (1)$$

Onde,  $\Phi=\Phi(r)$  é a função de redshift e  $b = b(r)$  é a “forma da função” (shape function), sendo ambas duas funções arbitrárias dependente apenas do raio, e  $c$  a velocidade da luz.

Sendo essa a métrica geral para um wormhole. Para seu estudo é necessário o conhecimentos dos símbolos de Christoffel e do tensor de curvatura de Riemann, sendo ambos definidos respectivamente como:

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (g_{\gamma\beta,\lambda} + g_{\lambda\gamma,\beta} + g_{\beta\gamma,\lambda}); \quad (2)$$

$$R_{\beta\gamma\delta}^{\alpha} = \Gamma_{\beta\delta,\gamma}^{\alpha} - \Gamma_{\beta\gamma,\delta}^{\alpha} + \Gamma_{\lambda\gamma}^{\alpha} \Gamma_{\beta\delta}^{\lambda} - \Gamma_{\lambda\delta}^{\alpha} \Gamma_{\beta\gamma}^{\lambda}. \quad (3)$$

Onde  $g_{\alpha\beta,\gamma} = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}}$ .

De posse de tais definições, podemos encontrar o tensor de Ricci e o escalar de curvatura através do tensor de Riemann, realizando contrações. Já o tensor de Einstein pode ser obtido através da seguinte fórmula:



$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}. \quad (4)$$

O  $R_{\mu\nu}$  é o tensor de Ricci,  $R$  o escalar de curvatura e  $g_{\mu\nu}$  o coeficiente métrico covariante. Também será usada uma base de vetores ortonormal do próprio sistema referencial.

#### 4. Desenvolvimento e Resultados

##### 4.1 Solução Específica do Wormhole

Como pode ser notada na equação (1), a métrica geral do wormhole de Morris-Thorne possui a liberdade de várias soluções que a satisfaça, dependendo da função de forma e da função de redshift. Alterando os valores de suas componentes, podemos encontrar soluções que minimize os efeitos da matéria exótica, anule as forças de maré entre alternativas. Para o estudo de um wormhole a solução mais simples para se trabalhar é dada pela métrica:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dl^2 + (b_0^2 + l^2)(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2). \quad (5.1)$$

Onde  $l$  é a posição no referencial próprio do viajante, limitada em:  $-\infty < l < \infty$ ,  $\theta$  e  $\varphi$  a posição em relação ao eixo em coordenadas esféricas limitado em:  $0 \leq \theta \leq \pi$  e  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  e  $b_0$  uma constante arbitrária positiva (diferente de zero) que definirá o raio da garganta do wormhole como será mostrado adiante.

A visualização do espaço representado é complicada por se tratar de um diagrama de quatro dimensões, no entanto pode-se construir um diagrama imerso no plano equatorial em determinado tempo fixo “t”, para isso igualamos  $\theta = \pi/2$ ; válido lembrar que devido a propriedade (1), da métrica do wormhole, a métrica possui simetria esférica e não há perda de generalidade ao definirmos um valor de  $\theta$ . Assim podemos reescrever a métrica com essas propriedades em função de um referencial de um observador parado, substituindo:  $l^2 = r^2 - b_0^2$ .

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{b_0^2}{r^2}} + r^2 d\varphi^2. \quad (5.2)$$

Podemos relacionar a métrica encontrada com a métrica euclidiana em coordenadas cilíndricas, encontrando a relação:

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{b_0^2}{r^2}} + r^2 d\varphi^2 = dz^2 + dr^2 + r^2 d\varphi^2. \quad (6)$$

Assim conseguimos construir uma dimensão auxiliar “z” que nos ajudar a visualizar a métrica. Organizando a equação encontramos a seguinte relação para z:

$$\frac{dz}{dr} = \pm \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{b_0^2}{r^2}} - 1}. \quad (7.1)$$

A solução da equação diferencial nos dá o eixo z dependente de r, e seguindo a parametrização usada na referência [2], encontramos:

$$z = \pm b_0 \ln \left( \frac{r}{b_0} + \sqrt{\frac{r^2}{b_0^2} - 1} \right) = \pm \operatorname{arccosh} \left( \frac{r}{b_0} \right). \quad (7.2)$$

Assim o diagrama do wormhole imerso no espaço euclidiano com coordenadas cilíndricas é representado pela seguinte imagem:

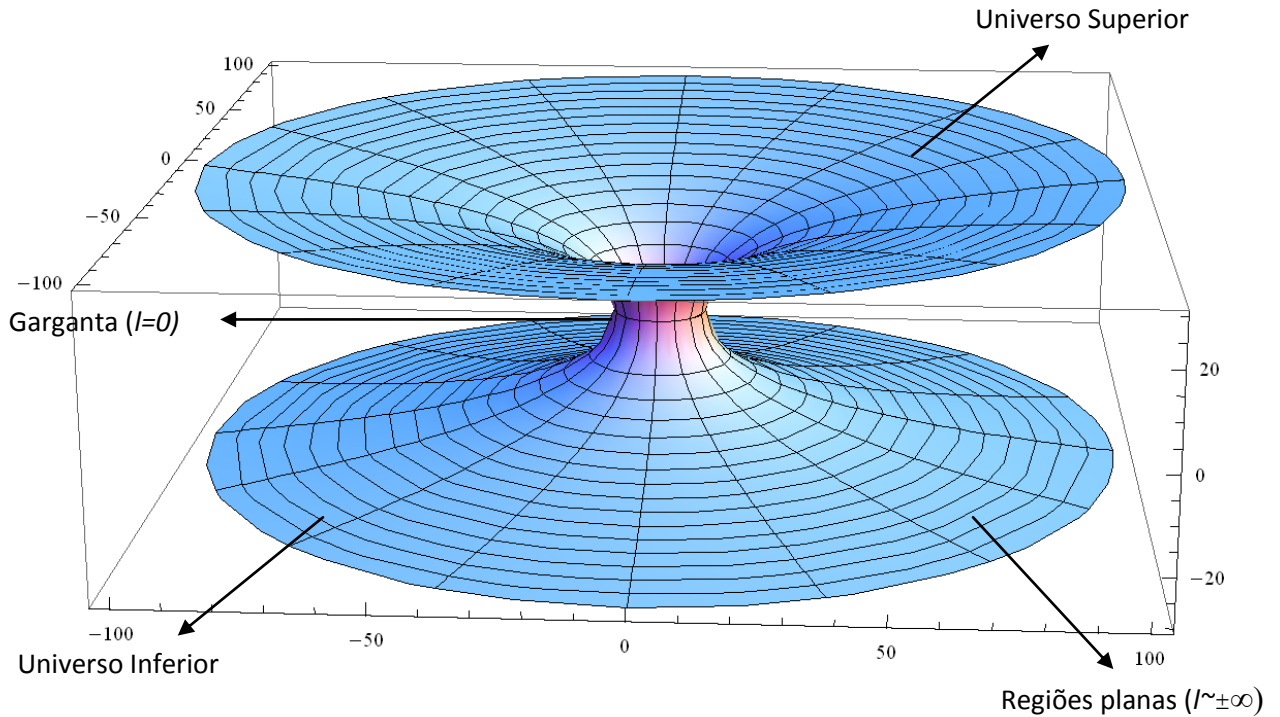


Figura 1. Diagrama de um wormhole transitável, imerso no espaço euclidiano com coordenadas cilíndricas, com valor de  $b_0 = 10$ .

A figura 1 construída no Mathematica mostra uma representação de um wormhole especificado pela métrica (5), ajudando a interpretar o espaço-tempo e a curvatura estudados.

#### 4.2 Matéria Exótica

A matéria exótica aparece espontaneamente nas equações de campo de Einstein ao utilizarmos a solução geral de um wormhole. Através das equações citadas na seção de metodologia conseguimos encontrar os tensores de Einstein que são dependentes da função de forma, da função de redshift e do raio. Sendo, no caso geral igual a:

$$G_{tt} = \frac{b'}{r^2}; \quad (8a)$$

$$G_{rr} = -\frac{b}{r^3} + \frac{2\left(1 - \frac{b}{r}\right)\Phi'}{r}; \quad (8b)$$

$$G_{\theta\theta} = G_{\varphi\varphi} = \left(1 - \frac{b}{r}\right)\left(\Phi'' - \frac{b'r - b}{2r(r-b)}\Phi' + (\Phi')^2 + \frac{\Phi'}{r} - \frac{b'r - b}{2r^2(r-b)}\right). \quad (8c)$$

Segue das equações de Einstein que:

$$G_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ab}. \quad (9)$$

Onde  $G$  é a constante gravitacional de Newton, e  $T_{ab}$  o tensor energia-momento.

Usando a mesma base vetorial por um observador parado, podemos dizer que a matriz correspondente ao tensor energia-momento é dada por:

$$T_{ab} = \begin{pmatrix} \rho(r)c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\tau(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p(r) \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Onde  $\rho(r)$  é a densidade total de masa-energia,  $\tau$  é a tensão por unidade de área medida em direção radial e  $p(r)$  é a pressão medida nas direções laterais (ortogonais a radial).

Desse modo, após algumas manipulações matemáticas, é possível isolar as componentes do tensor energia-momento em relação às funções da métrica. Sendo cada componente dada por:

$$\rho = \frac{b'}{8\pi G c^{-2} r^2}; \quad (11a)$$

$$\tau = \frac{\frac{b}{r} - 2(r-b)\Phi'}{8\pi G c^{-4} r^2}; \quad (11b)$$

$$p = \left(\frac{r}{2}\right) ((pc^2 - \tau)\Phi' - \tau') - \tau. \quad (11c)$$

Na garganta do wormhole temos,  $r=b=b_o$ , onde  $\rho$  e  $p$  dependem da função de forma, enquanto  $\tau$  depende apenas de  $b_o$ . Consequentemente é possível obter o valor da tensão na garganta em função de  $b_o$ :

$$\tau = (8\pi G c^{-4} b_o^2)^{-1} = 5 \times 10^{40} \left(\frac{10m}{b_o}\right)^2 N/m^2. \quad (12)$$

Para analisar as tensões na garganta e em sua vizinhança, definimos a seguinte função sem dimensão, no lado direito temos a mesma função substituída pelas equações (11a) e (11b) da métrica geral do wormhole<sup>[3]</sup>:

$$\zeta = \frac{\tau - \rho c^2}{|\rho c^2|} = \frac{\frac{b}{r} - b' - 2(r - b)\Phi'}{|b'|} \quad (13)$$

Conseguimos relacionar a função definida (13) com a função de superfície imersa (7.1) na forma genérica, a segunda derivada do inverso da função (7.1), pelo diagrama, deve satisfazer a igualdade  $d^2r/dz^2 > 0$ , na garganta e na região próxima. Assim relacionando a segunda derivada e lembrando que a função  $\Phi$  e  $b$  são limitadas devido à ausência de horizontes na garganta, encontramos que  $\zeta > 0$ , para  $r=b=b_0$ .

No entanto para a condição ser respeitada, precisamos ter um  $\tau_0 > \rho_0 c^2$ . O que faz com que um viajante que passe pela garganta em velocidade próxima a da luz, veja uma matéria com densidade de massa-energia negativa. O que viola as condições de energia conhecidas<sup>[4]</sup>. A densidade de energia negativa surge da equação seguinte.

$$\rho c^2 = \gamma^2(\rho_0 c^2 - \tau_0) + \tau_0. \quad (14)$$

Onde  $\gamma \gg 1$  e  $\rho_0$  é a densidade de energia na garganta vista pelo viajante próximo e  $\tau_0$  a tensão no mesmo ponto. Assim é fácil notar que satisfazendo todas as condições teremos  $\rho c^2 < 0$ .

#### 4.3 Geodésicas

As geodésicas são trajetória de partículas em queda livre que representam o menor caminho entre dois pontos. Podemos visualizar o comportamento de algo passando pelo wormhole através de seu estudo. No entanto, quando usamos partículas nos referimos a geodésicas do tipo tempo (timelike), para visualização iremos usar geodésicas formadas por raios de luz (null), pois a distância ao longo de um raio de luz no espaço-tempo é zero<sup>[5]</sup>, facilitando um pouco os cálculos. Em geral as geodésicas são calculadas numericamente, no entanto a métrica simplificada do wormhole (5.1) apresenta uma solução analítica quando utilizamos um tempo constante e um valor fixo de  $\theta$ <sup>[6]</sup>, que no caso será:  $\theta = \pi/2$ . As geodésicas que nos interessa são as arbitrarias, no qual encontramos a relação  $\varphi(r)$  ou  $r(\varphi)$ .

Podemos chegar às equações de geodésica através do formalismo de Lagrange. A Lagrangeana pode ser definida como:

$$L = g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu. \quad (15)$$

Por se tratar de geodésicas do tipo luz, temos  $L=0$ . Segue da equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0. \quad (16)$$

Ao solucionarmos a equação (16) definimos duas novas constantes de movimentos, para simplificarmos a expressão, portanto temos:  $k = c^2\dot{t}$  e  $h = (b_0^2 + l^2)\dot{\varphi}$ . Substituindo as constantes definidas na equação (15) obtemos:

$$l^2 = \frac{k^2}{c^2} - \frac{h^2}{b_0^2 + l^2}. \quad (17)$$

Para calcularmos as geodésicas arbitrárias iremos considerar o movimento orbital  $l=l(\varphi)$ . Para isso precisamos da relação de  $dl/d\varphi$ . Em termos da equação (17) conseguimos a expressão:

$$\left( \frac{dl}{d\varphi} \right)^2 = \frac{l^2}{\dot{\varphi}^2} = \frac{\left( \frac{k^2}{c^2} \right) (b_0^2 + l^2)^2}{h^2} - (b_0^2 + l^2). \quad (18)$$

Podemos substituir  $l$  por  $r$ , para simplificarmos a equação definimos uma nova constante  $a$ , e deixamos  $r$  em função de uma nova variável  $p$ :

$$a = \frac{b_0 k}{c h}, r = \frac{b_0}{a p}. \quad (19a,b)$$

(20)

$$\left(\frac{dp}{d\varphi}\right)^2 = (1 - a^2 p^2)(1 - p^2).$$

A equação (20) nos dá a órbita da geodésica. Para sua solução, primeiro iremos reescrever as constantes  $k$  e  $h$  em função das condições iniciais. As condições iniciais são dadas pela posição inicial  $(t_i, l_i, \varphi_i)$  e pela direção  $y$  em relação ao referencial local. Assim relacionando os termos com as coordenadas curvilíneas e com a variação do deslocamento temos:

(21)

$$y = y^t \mathbf{e}_t + c \cos \xi \mathbf{e}_l + c \sin \xi \mathbf{e}_\varphi = \frac{y^t}{c} \partial_t + c \cos \xi \partial_l + \frac{c \sin \xi}{\sqrt{b_0^2 + l_i^2}} \partial_\varphi = \dot{t} \partial_t + \dot{l} \partial_l + \dot{\varphi} \partial_\varphi.$$

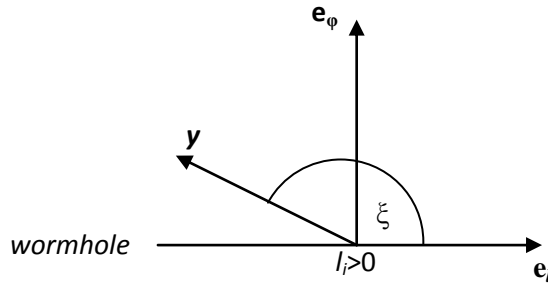


Figura 2. Direção inicial  $y$  em relação ao referencial local.  
Sem perda de generalidade temos  $l_i > 0$  e  $0 \leq \xi \leq \pi$ .

Assim conseguimos os novos valores de  $k$  e  $h$  em funções das condições iniciais, sendo  $k = \pm c^2$  e  $h = c(b_0^2 + l_i^2)^{1/2} \sin \xi$ .

O ângulo  $\xi$  é importante na solução da equação (20), pois podemos relacioná-lo com o potencial efetivo e determinar um ângulo crítico no qual a geodésica se conduz assintoticamente pela garganta, assim determinamos o valor de  $a$  (que agora pode também ser reescrito em função de  $\xi$ , assim como  $p$ ) de acordo com a condição inicial  $\xi$  dada. Mais detalhes podem ser visto na referência [6]. O ângulo crítico é dado pela equação:

(22)

$$\xi_{crit} = \arcsen\left(\frac{b_0}{\sqrt{b_0^2 + l_i^2}}\right).$$

Assim temos as seguintes condições para a solução da equação (20):

$$a = \begin{cases} < 1, \text{ para } \xi_{crit} < \xi < \pi - \xi_{crit} \\ = 1, \text{ para } \xi = \xi_{crit} \\ > 1, \text{ para } \xi < \xi_{crit} \text{ ou } \xi > \pi - \xi_{crit} \end{cases} . \quad (23)$$

Para o primeiro caso, temos que a solução da equação (20) resultada na integral:

$$\varphi = \pm \int_{p_i}^p \frac{dp}{\sqrt{(1 - a^2 p^2)(1 - p^2)}} . \quad (24)$$

Onde o lado direito é dado pela integral elíptica da função  $F$ . Assim podemos definir:

$$\varphi = \pm [F(p, a) - F(\text{sen}\xi, a)] . \quad (25)$$

O inverso da função da integral elíptica da função  $F$  é chamada de função de Jacobi sn. O inverso de (25) é:

$$p = \frac{\left[ -\text{sn}(\varphi, a) \cos\xi \sqrt{1 - b_i^2} + \text{sen}\xi \text{cn}(\varphi, a) \text{dn}(\varphi, a) \right]}{[1 - b_i^2 \text{sn}^2(\varphi, a)]} . \quad (26)$$

Onde  $b_i = \frac{b_0}{\sqrt{b_0^2 + l_i^2}}$ .

Reorganizando a equação (19b) temos que:

$$l(\varphi) = \text{sign}(l_i) b_0 \sqrt{\frac{1}{a^2 p^2} - 1} . \quad (27)$$

Onde  $\text{sign}$  representa o sinal de  $l_i$  necessário, pois a geodésica se encontra no universo em que começa (inferior ou superior (figura 1)), pois para  $a < 1$  a geodésica não atravessa a garganta. Dessa forma, conseguimos a relação final de  $r=r(\varphi)$  em função das funções apresentadas.



Para visualizar o comportamento dessa geodésica iremos definir os valores de algumas constantes e plotar os gráficos utilizando o Mathematica, a representação na superfície imersa será feita utilizando o aplicativo do WolframAlpha, disponível na referência [7]:

Exemplo 1:

$$\xi=16^\circ, b_o=2, r_i=8, a=0,907, b_i=0,25.$$

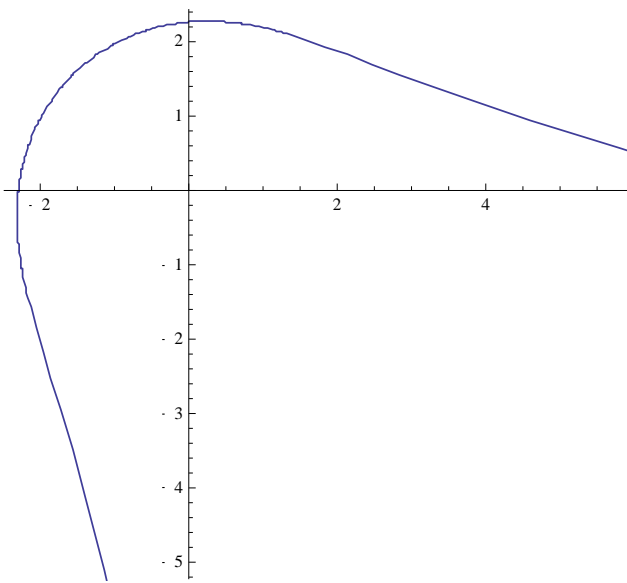


Figura 3a. Geodésica do tipo  $a < 1$ ,  $0 \leq \varphi \leq 5^\circ$ .

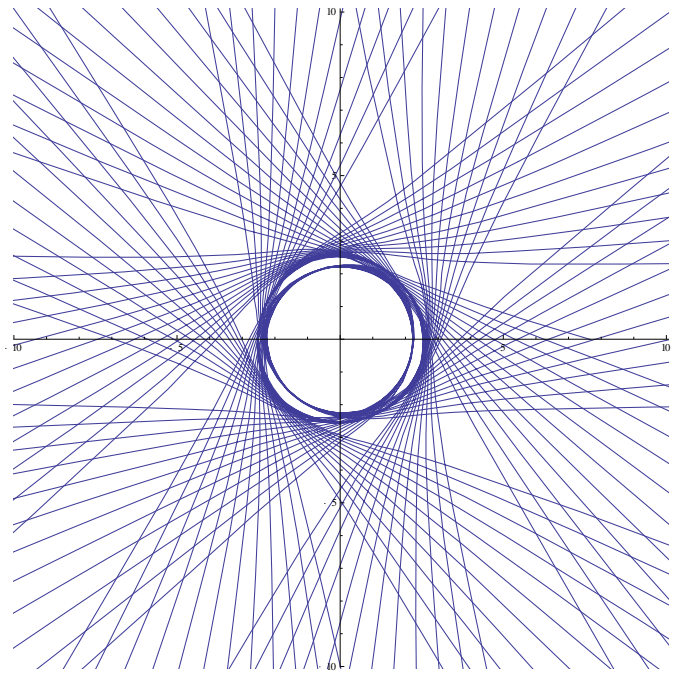
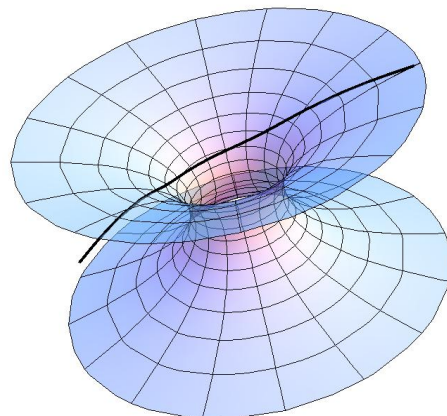


Figura 3b. Família de Geodésicas do tipo  $a < 1$ ,  $0 \leq \varphi \leq 360^\circ$ .

$$\xi_{\text{init}} = 14.4775^\circ$$

$$\phi_{\text{max}} = 248.758^\circ$$

Figura 3c. Representação da geodésica na superfície imersa.



Em segundo caso iremos tratar da solução quando  $a > 1$ , nesse caso a geodésica deve atravessar a garganta ou recuar para o infinito. Em ambos os casos iremos usar a função inversa de  $a$ ,  $\alpha = 1/a$ .

(28)

$$\frac{\varphi}{\alpha} = \pm \int_{p_i/\alpha}^{p/\alpha} \frac{dp}{\sqrt{(1 - \alpha^2 p^2)(1 - p^2)}}.$$

De maneira similar, encontramos o valor de  $p$  dado por:

(29)

$$p = \frac{\left[ -sn(a\varphi, \alpha) \cos \xi \sqrt{1 - b_i^2} + b_i cn(a\varphi, \alpha) dn(a\varphi, \alpha) \right]}{a[1 - \text{sen}^2 \xi \text{sn}^2(a\varphi, \alpha)]}.$$

Chegando na relação final:

(30)

$$l(\varphi) = \text{sign}(\varphi_{garganta} - \varphi) \text{sign}(l_i) b_0 \sqrt{\frac{1}{\alpha^2 p^2} - 1}.$$

$$\varphi_{garganta} = \alpha K(\alpha) - \alpha F(b_i, \alpha). \quad (31)$$

$$K(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{\sqrt{1 - \alpha^2 \text{sen}^2 \omega}}. \quad (32)$$

OBS: Para a produzirmos o gráfico de uma geodésica do tipo  $a > 1$ . Para esse exemplo foi alterado o código disponível no site do WolframAlpha para se obter o valor mais rapidamente sem necessidade de seu cálculo. É válido lembrar que devemos usar apenas valores reais de  $l$ , ao mudarmos as coordenadas para  $r$ , para que os gráficos possam ser corretos.

Exemplo 2:

$\xi=10^\circ$ ,  $b_o=2$ ,  $r_i=8$ ,  $a=1,43$ ,  $b_i=0,25$ ,  $\alpha=0,69$ .

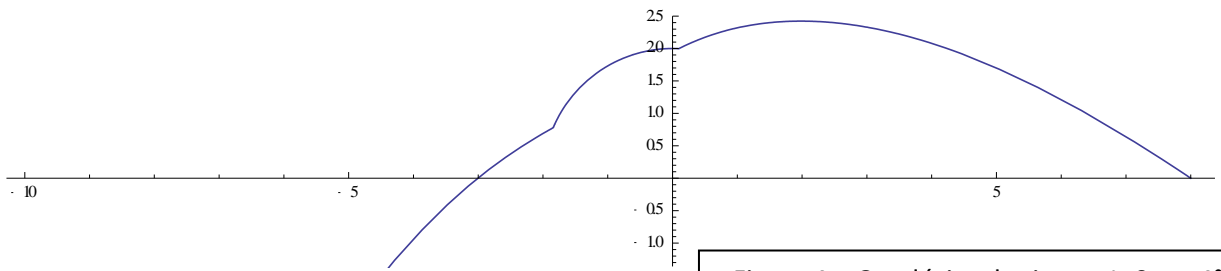


Figura 4a. Geodésica do tipo  $a>1$ ,  $0 \leq \varphi \leq 4^\circ$ .

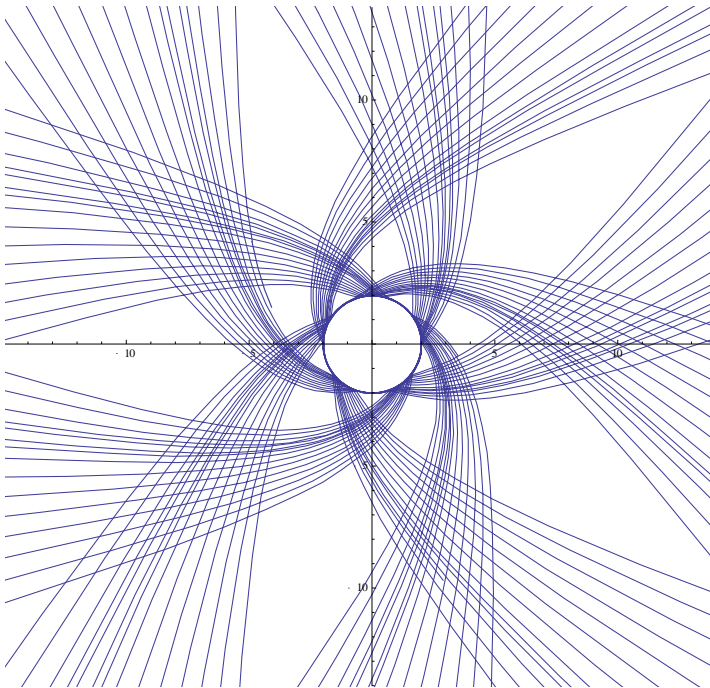
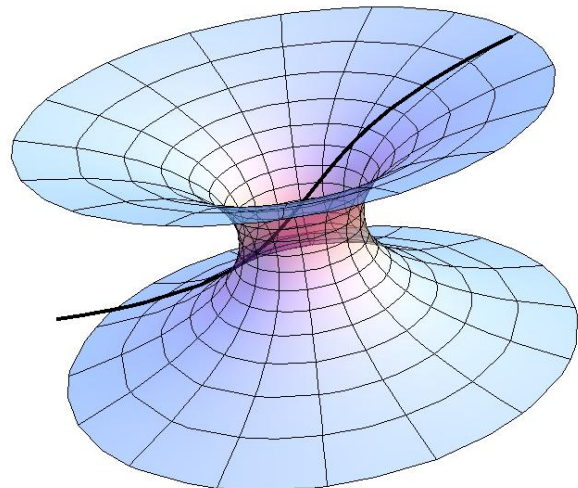


Figura 4b. Família de Geodésicas do tipo  $a>1$ ,  $0 \leq \varphi \leq 360^\circ$ .

$$\begin{aligned}\xi_{\text{krit}} &= 14.4775^\circ \\ \phi_{\text{max}} &= 136.306^\circ\end{aligned}$$

Figura 4c. Representação da geodésica na superfície imersa.



Em último caso, temos  $a=1$ . Isso implica que devemos usar exatamente o ângulo crítico definido anteriormente. A solução da equação (20) se resume a:

$$\varphi = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{(b_i \pm 1)(p \pm 1)}{(b_i \pm 1)(p \pm 1)} \right]. \quad (33)$$

Consequentemente segue:

$$p = \frac{\pm \sinh \varphi \cosh \varphi (1 - b_i^2) + b_i}{\cosh^2 \varphi - b_i^2 \sinh^2 \varphi}. \quad (34)$$

$$l^\pm = b_0 \sqrt{\frac{1}{p^2} - 1}. \quad (35)$$

Exemplo 3:

$\xi=14,4775^\circ$ ,  $b_o=2$ ,  $r_i=8$ ,  $a=1$ ,  $b_i=0,25$ .

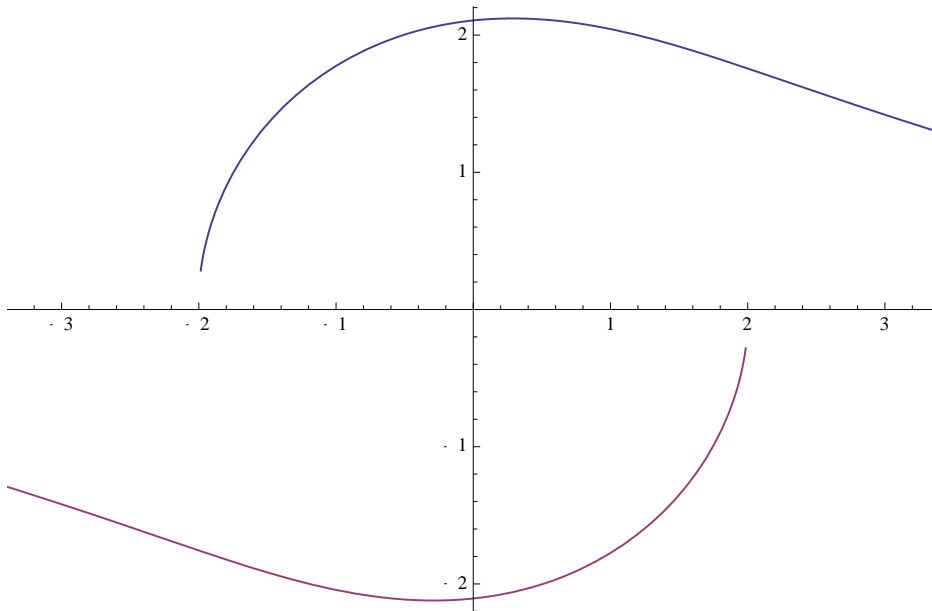


Figura 5a. Geodésica do tipo  $a=1$ ,  
 $0 \leq \varphi \leq 3$ .

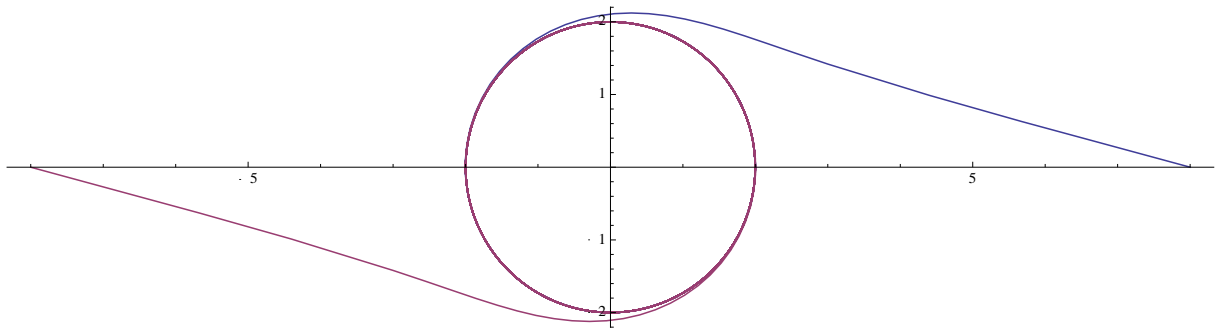


Figura 5b. Geodésica do tipo a=1,  
 $0 \leq \varphi \leq 360^\circ$ .

$$\xi_{\text{krit}} = 14.4775^\circ$$

$$\phi_{\text{max}} = 907.19^\circ$$

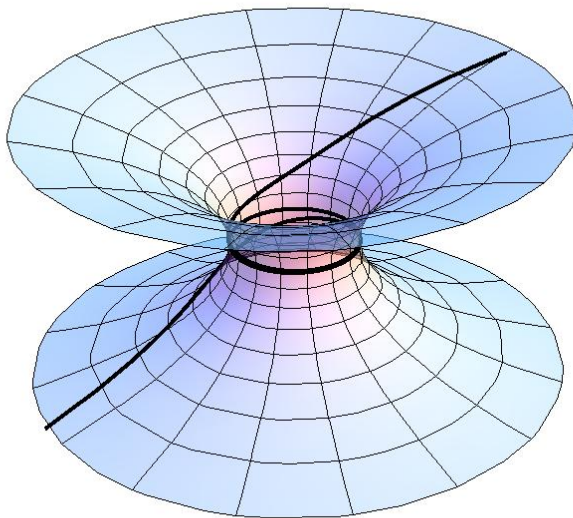


Figura 5c. Representação da geodésica na  
 superfície imersa.

## 5. Conclusão

A métrica do wormhole é uma das alternativas para se viajar mais rápido do que a velocidade da luz, através do seu estudo foi possível compreender o formato de seu espaço-tempo e a trajetória de algo se movendo nele. No entanto para sua construção é necessária uma grande tensão que deve ser produzida por uma matéria que viola as condições de energia conhecidas e denominamos exótica. No relatório final espera-se comparar os resultados apresentados com o da métrica de warp drive e assim dizer qual a vantagem de desvantagem de cada uma delas, e concluir através do que foi analisado qual representa a melhor possibilidade.

## 6. Cronograma

01/08/2013 a 30/09/2013 Revisão da literatura de wormholes e estudo da métrica de Morris-Thorne.

01/10/2013 a 30/11/2013 Trajetórias na métrica de Morris-Thorne, aparência visual do wormhole.

01/12/2013 a 28/02/2014 Visualização computacional dos resultados obtidos. Elaboração do relatório parcial.

01/03/2014 a 31/03/2013 Estudo da métrica de Alcubierre para warp drive.

01/04/2013 a 31/05/2013 Visualização computacional do espaço-tempo.

01/06/2014 a 31/07/2014 Comparação entre as duas possibilidades estudadas para se viajar mais rápido do que a luz. Elaboração do relatório final.

## 7. Referências

[1] M.S. MORRIS, K.S. THORNE e U. YURTSEVER, **Wormholes, Time Machines, and the Weak Energy Condition**, Phys. Rev. Lett. 61, 1446-1449 (1988).

- [2] WANG, Frank Y. **The images of a wormhole**. 16/05/2005 disponível em:  
[arxiv.org/pdf/physics/0505108v1.pdf](http://arxiv.org/pdf/physics/0505108v1.pdf)
- [3] LOBO, Francisco, CRAWFORD, Paulo. **“Wormholes”: Túneis no Espaço-Tempo**.  
Gazeta de Física. Disponível em: [nautilus.fis.uc.pt/gazeta/revistas/22\\_3/004-010.300.pdf](http://nautilus.fis.uc.pt/gazeta/revistas/22_3/004-010.300.pdf)
- [4] VISSER, Matt, BACELÓ, Carlos. **Energy conditions and their cosmological implications**. Disponível em: [arxiv.org/pdf/gr-qc/0001099v1.pdf](http://arxiv.org/pdf/gr-qc/0001099v1.pdf)
- [5] HARTLE, James B. **Gravity: an introduction to Einstein's general relativity**. San Francisco, EUA: Addison Wesley, c2003. xxii, 582 p.
- [6] MULLER, Thomas. **Exact geometric optics in a Morris-Thorne wormhole spacetime**.  
Physical Review D 77, 044043 (2008).
- [7] WOLFRAMDEMONSTRATIONPROJECT, **Geodesics in the Morris-Thorne Wormhole Spacetime**. Disponível em:  
[demonstrations.wolfram.com/GeodesicsInTheMorrisThorneWormholeSpacetime/](http://demonstrations.wolfram.com/GeodesicsInTheMorrisThorneWormholeSpacetime/). Acessado dia: 25/02/2014.