

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

INTRODUÇÃO À RELATIVIDADE GERAL:  
ULTRAPASSANDO A BARREIRA DA VELOCIDADE DA  
LUZ

ANDERSON CARLOS DOS SANTOS

MARÇO, 2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

INTRODUÇÃO À RELATIVIDADE GERAL:  
ULTRAPASSANDO A BARREIRA DA VELOCIDADE DA  
LUZ

Relatório submetido à Universidade Federal do ABC,  
com informações parciais sobre o andamento do projeto  
de iniciação científica.

**Orientadora: Prof(a). Dr(a). Cecilia B. M. H. Chirenti**  
Centro de Matemática, Computação e Cognição (CMCC) - UFABC

ANDERSON CARLOS DOS SANTOS

MARÇO, 2013

## **RESUMO**

Viagens mais rápidas do que a velocidade da luz são ficções científica fascinantes, a possibilidade de poder conhecer algo além do nosso mundo ou talvez do nosso universo foram usadas com sucesso em best sellers como “Contato” de Carl Sagan e a série “Star Trek, Jornada nas estrelas”. Contudo, a física permite tais ficções científicas no mundo real, e modelos matemáticos comprovam a possibilidade de um dia podermos ter essa tecnologia. Este relatório contém a primeira parte do projeto que consiste em um estudo de relatividade restrita, relatividade geral e conseqüentemente estudos de modelos de viagens mais rápidas do que a da luz. Ao longo do relatório serão apresentados conceitos e cálculos a partir da teoria da Relatividade proposta por Albert Einstein.

## **ABSTRACT**

Travel faster than the speed of light is fascinating science fiction, and the possibility of being able to know something beyond our world or our universe was used successfully in best sellers such as "Contact" by Carl Sagan and the "Star Trek" series. However, Physics allows such fictions in the real world and mathematical models show the possibility that one day we could have this technology. This report contains the first part of a project that consists of a study of special relativity, general relativity and consequently studies models travel faster than light. Throughout the report will be presented concepts and calculations from the theory of relativity proposed by Albert Einstein.

# SUMÁRIO

<b>Notações</b> .....	<b>6</b>
<b>1. Introdução</b> .....	<b>7</b>
<b>2. Objetivos</b> .....	<b>8</b>
<b>3. Materiais e Métodos</b> .....	<b>9</b>
3.1 Literatura.....	9
3.2 Recursos Computacionais .....	9
<b>4. Desenvolvimento e Resultados</b> .....	<b>9</b>
4.1 Transformações de Lorentz .....	9
4.2 Relatividade Restrita .....	12
4.3 Espaço-Tempo de Minkowski .....	13
4.4 Geometria não-Euclidiana .....	17
<b>5. Conclusões</b> .....	<b>18</b>
<b>6. Cronograma Proposto</b> .....	<b>19</b>
<b>7. Referências</b> .....	<b>19</b>

## NOTAÇÕES

### Lista de Símbolos

$\tau$  = *tempo próprio*

$l_0$  = *comprimento próprio*

$m_0$  = *massa de repouso*

$c$  = *velocidade da luz*

$\rho = ct$

$\beta = \frac{v}{c}$

$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$

$\mathbf{u}$  = *quadrivetor velocidade*

$\mathbf{a}$  = *quadrivetor aceleração*

$\vec{v}$  = *vetor velocidade tridimensional*

$a$  = *módulo da aceleração*

$v$  = *módulo da velocidade*

$\hbar$  = *constante de Planck*

$R$  = *raio da esfera*

$r$  = *raio do círculo*

### Lista de Figuras

- 1 Relógio de Luz
- 2 Cone de Luz
- 3 Círculo inscrito na superfície esférica

### Lista de Abreviações

TL = Transformações de Lorentz

# 1. INTRODUÇÃO

Em 1862 James Clerk Maxwell publica um artigo unificando as forças elétricas e magnéticas em quatro fórmulas e dando origem ao eletromagnetismo. Como um dos resultados, surge à velocidade das ondas eletromagnéticas “c” dada por  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ . Porém os físicos da época acreditavam que as equações de Maxwell deveriam expressar o eletromagnetismo apenas no referencial inercial do Éter; substância hipotética a qual acredita que o universo era banhado, serviria de meio para a propagação das ondas eletromagnéticas e seria o referencial absoluto de todo universo.

Contudo as equações de Maxwell continham um problema, elas não obedeciam ao princípio de relatividade proposto por Newton, composto pelas transformações de Galileu considerando um referencial em velocidade uniforme no eixo x em relação a um inercial:

$$\begin{aligned} (1a) \quad & x' = x - vt, \\ (1b) \quad & y' = y, \\ (1c) \quad & z' = z, \\ (1d) \quad & t' = t. \end{aligned}$$

Parecia óbvio que as equações de Maxwell deveriam estar erradas, então a coisa a ser fazer era mudá-las de modo que, sob a transformação de Galileu, o princípio da relatividade fosse satisfeito. Quando isso foi tentado, os novos termos que tiveram de ser inseridos nas equações levaram a previsões de novos fenômenos elétricos que não existiam de forma algum quando testados experimentalmente, então a tentativa foi abandonada [1]. Porém em 1904 Hendrick Antoon Lorentz observou que as equações de Maxwell permaneciam fascinantemente com a mesma forma quando aplicadas a elas outro tipo de transformação dada por:

$$\begin{aligned} (2a) \quad & x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ (2b) \quad & y' = y, \\ (2c) \quad & z' = z, \\ (2d) \quad & t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned}$$

Como resultado essa transformação mostrava que não era o eletromagnetismo que deveria ser alterado, e sim a mecânica de Newton.

Em 1887, Albert Michelson e Edward Morley desenvolveram um experimento que levou os seus nomes. A intenção do experimento era medir a velocidade do Éter em relação à Terra usando uma fonte de luz e espelhos, partindo da velocidade da luz proposta pelas Equações de Maxwell e da relatividade Galileana, o experimento porém não apresentou resultados, e em todas medições se encontrou uma velocidade 0, a qual levaram ao abandono do conceito de Éter e ao choque com as Transformações de Lorentz 17 anos depois.

Em 1905, 18 anos após o experimento de Michelson-Morley, entra em cena Albert Einstein que publica a teoria da Relatividade Restrita, explicando os resultados obtidos por Michelson e Morley, e usando como base as transformações de Lorentz. No entanto a Relatividade Restrita teve grande impacto na ciência e na filosofia, a noção de tempo absoluto se perdia, a física de Newton se tornava apenas uma aproximação dos fenômenos naturais e novos conceitos nasciam alterando a visão de mundo e se focando em um único valor absoluto: a velocidade da luz.

Em 1915, 10 anos após a publicação da Relatividade Restrita, Albert Einstein reformula sua teoria e apresenta a Relatividade Geral, agora com a inserção de campos de gravitacionais e de espaços não curvos. Com isso a gravidade passa a ser vista como uma deformação no espaço-tempo, possuindo aspectos muito mais geométricos.

A Relatividade Geral passa ser a principal teoria do comportamento do universo em grandes escalas, ela aponta para a existência de buracos negros, ondas gravitacionais e outros fenômenos possivelmente presentes no universo. A solução para buracos de minhocas ou wormholes, foi encontrada pelo próprio Einstein alguns anos depois da publicação da teoria, e ela permitiria ligar dois pontos do espaço-tempo por um “atalho”. Em 1994, o físico mexicano Miguel Alcubierre propôs um método de contração e expansão do espaço-tempo que através de uma “bolha” seria possível viajar mais rápido que a velocidade da luz, esse método recebeu o nome de dobra espacial ou warp drive. Porém ambas as soluções dependem de conhecimentos físicos mais avançados e de uma possível matéria exótica que permitiria tal acontecimento.

## **2. OBJETIVOS**

Este projeto tem como objetivo:

- Iniciativa a pesquisa de literatura;
- Iniciativa a elaboração de relatórios;
- Revisão de conceitos de relatividade restrita e geometria diferencial;
- Estudo da teoria da relatividade geral;
- Obter uma estimativa das limitações que devem ser superadas para que viagens mais rápidas do que a velocidade da luz sejam possíveis.



### 3. MATERIAS E MÉTODOS

Por se tratar de um projeto teórico, foram necessários recursos computacionais bastante modestos além da bibliografia.

#### 3.1 Literatura

As leituras iniciais sobre a da Relatividade de Einstein se deram no livro “Lições de Física de Feynman” de Richard Feynman [1], “Gravity From the Ground Up” de Bernard F. Schutz [2], “Física Básica Vol. 4: Ótica, Relatividade e Física Quântica” de Moysés Nussenzveig [3] e “Teoria da Relatividade Especial” de Ramayana Gazzinelli [4]. Após a familiaridade com o assunto foi usado o livro: “Gravity: An Introduction to Einstein’s General Relativity” de James B. Hartle [5].

#### 3.2 Recursos Computacionais

Foram usadas ferramentas como o “WolframAlpha” e o “Winplot” como recursos numéricos, além de editores de texto como o “Word” para elaboração do relatório.

### 4. DESENVOLVIMENTO E RESULTADOS

#### 4.1 Transformações de Lorentz

No começo do projeto o estudo se deu pela interpretação das transformações de Lorentz, que Einstein se baseou para a formulação da Teoria da Relatividade Restrita. As transformações demonstram além da harmonia da mecânica com o eletromagnetismo, uma mudanças no espaço e no tempo, para deduzir essas mudanças foram usados relógios de luz em objetos se movimentando unidimensionalmente, considerando a velocidade da luz constante em todos os referenciais. Um relógio de luz é um mecanismo composto por uma fonte de luz e dois espelhos, assim podemos imaginar que quando a luz emitida encontra o primeiro espelho faz “tic” e depois ao ser refletida novamente faz “tac”, similar a um relógio comum. Encontramos assim a partir de um referencial inercial à Contração de Lorentz-Fitzgerald e a dilatação dos intervalos de tempo.

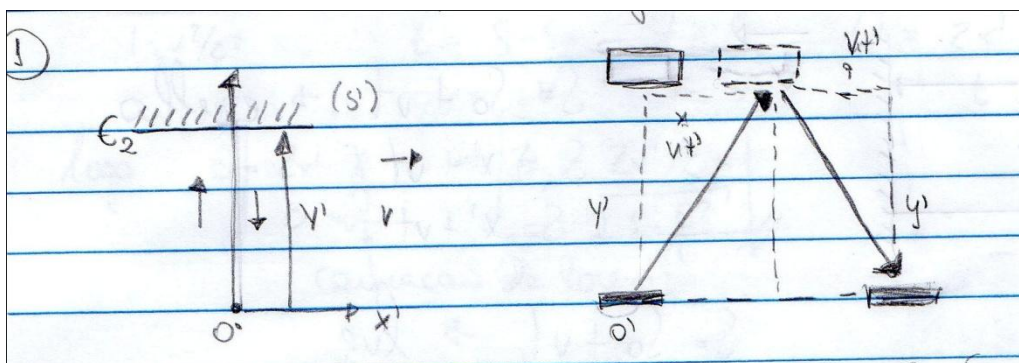


Figura 1: A esquerda se encontra o relógio de luz parado e como um observador externo, em um referencial inercial, vê a luz se movimentando. A direita se encontra o relógio de luz em movimento unidimensional, a luz parece se mover em “zig-zag”, como consequência a distância  $y$  percorrida na vertical fica maior sendo:  $y = \sqrt{(ct)^2 - (vt)^2}$ , onde  $v$  é a velocidade do relógio, assim é fácil notar que o “tic-tac” deverá demorar mais para acontecer e o tempo passará mais de vagar no referencial do relógio, e isso será análogo a qualquer outro relógio feito de engrenagens ou de desintegração radioativa [1].

Podemos expressar então que:

$$(3.1) \quad y = ct \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

considerando que a luz vai e volta tem-se que:

$$(3.2) \quad t = \frac{2 \frac{y}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Enquanto isso para um observador no referencial do relógio:

$$(3.3) \quad \tau = \frac{2y}{c},$$

substituindo:

$$(3.4) \quad t = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Que equivale a dilatação dos intervalos de tempo. De maneira semelhante usando um espelho se movendo na direção do feixe de luz encontrar-se-ia à Contração de Lorentz-Fitzgerald que é:

$$(4) \quad l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

As transformações de Lorentz também se mostra invariante na substituição de coordenadas. Podemos trabalhar de maneira matricial expressando-as como:

$$(5.1) \quad A\mathbf{v} = \mathbf{u},$$

$$(5.2) \quad \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

A partir da notação matricial, podemos calcular  $\mathbf{v} = A^{-1}\mathbf{u}$ , que resulta em:

$$(5.3) \quad \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Foi testada sua invariância no projeto, substituindo-as na equação da onda no vácuo:

$$(5.4) \quad \Delta\varphi(x, y, z) - \frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho^2} = 0,$$

$$(5.5) \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} \right) \varphi = 0,$$

$$(5.6) \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \beta^2\gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial\rho'^2} - \frac{2\beta\gamma^2\partial^2}{\partial x'\partial\rho'} + \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2},$$

$$(5.7) \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y'^2},$$

$$(5.8) \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial z'^2},$$

$$(5.9) \quad -\frac{\partial^2}{\partial t^2} = -\gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial\rho'^2} + 2\gamma^2\beta \frac{\partial^2}{\partial x'\partial\rho'} - \beta^2\gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2},$$

$$(5.10) \quad \left( \beta^2\gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial\rho'^2} - \frac{2\beta\gamma^2\partial^2}{\partial x'\partial\rho'} + \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} - \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial\rho'^2} + \frac{2\gamma^2\beta\partial^2}{\partial x'\partial\rho'} - \beta^2\gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \right) \varphi = 0,$$

$$(5.11) \quad \left[ (\beta^2 \gamma^2 - \gamma^2) \frac{\partial^2}{\partial \rho'^2} + (\gamma^2 - \beta^2 \gamma^2) \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \right] \varphi = 0,$$

$$(5.12) \quad \left( -\frac{\partial^2}{\partial \rho'^2} + \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \right) \varphi = 0,$$

Assim a equação da onda se mostra invariável em meio a uma TL, o que não acontece com as transformações de Galileu usadas na mecânica clássica. Na verdade uma TL representa uma rotação no espaço-tempo como será mostrado mais adiante.

## 4.2 Relatividade Restrita

A Relatividade Restrita se baseia em dois princípios:

1. Princípio da Relatividade Restrita: As leis físicas são as mesmas em todos os referenciais inerciais:
2. O Princípio da Constância da Velocidade da Luz: A velocidade da luz, no vácuo,  $c$ , é a mesma em todas as direções e em todos os referenciais inerciais, e é independente do movimento da fonte [3].

A partir desses dois princípios e de sua definição de Simultaneidade, Einstein chegou às TL de maneira independente, dando assim uma explicação a elas, o que Lorentz não havia feito. Surge agora à mecânica relativística e além do tempo e do espaço a massa também varia de acordo com:

$$(6.1) \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Isso leva a alteração das grandezas físicas como Força, momento e energia, fazendo Einstein chegar a uma de suas equações mais famosas:

$$(6.2) \quad E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = mc^2.$$

E a uma nova fórmula de energia total para uma partícula dada por:

$$(7.1) \quad E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4,$$

assim para um fóton encontraríamos  $E^2 = p^2 c^2$ , utilizando a relação de momento de De Broglie, teríamos:

$$(7.2) \quad E^2 = \frac{\hbar^2}{\lambda^2} c^2,$$

$$(7.3) \quad E = \hbar f.$$

Que é exatamente a fórmula de quantização de energia proposta por Planck. Assim as novas equações de Einstein demonstram sucesso ao trabalhar como novos experimentos como o do Efeito Compton. As fórmulas de Einstein foram usadas para dedução e entendimento da nova mecânica que estava a ser estudada durante o projeto.

### 4.3 O espaço-tempo de Minkowski

O espaço de Minkowski foi usado na maioria dos exercícios feito até agora, por ser um espaço plano torna mais fáceis às resoluções e envolvem apenas conceitos de relatividade restrita. Temos como característica desse espaço, a invariância de intervalo:

$$(8.1) \quad \Delta S^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 - (cdt)^2.$$

Para facilitar os cálculos foi usado  $c=1$ , também poderíamos ter usado a componente temporal como imaginária pura, por formalismo matemático (mais detalhes podem ser vistos na referência [4] e no apêndice A da referência [5]). Resultando em:

$$(8.2) \quad \Delta S^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 + (idt)^2.$$

Porém para já adquirir uma familiaridade com a Relatividade Geral foi mais usado à métrica do espaço de Minkowski, que pode ser representada como:

$$(8.3) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Partimos então para as seguintes definições:

$$(8.4a) \quad \Delta S > 0 \text{ (vetor do tipo espaço),}$$

$$(8.4b) \quad \Delta S = 0 \text{ (vetor do tipo luz),}$$

$$(8.4c) \quad \Delta S < 0 \text{ (vetor do tipo tempo).}$$

Podemos assim representar a trajetória de uma partícula no espaço de Minkowski através de um diagrama. Para um caso mais interessante podemos representar um fóton da seguinte maneira:

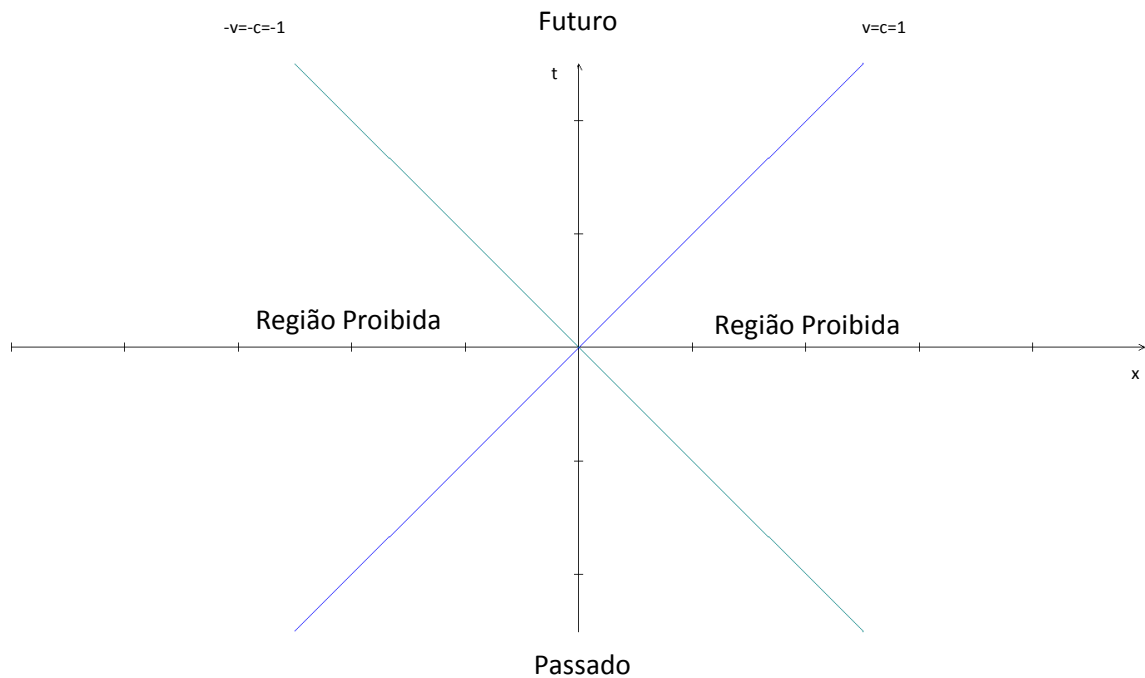


Figura 2: A trajetória do fóton no espaço de Minkowski gerando um cone de luz.

A figura mostra como o fóton se move no espaço de Minkowski em relação a um observador inercial, sendo  $t(x)=x$ . O eixo  $t$  representa o tempo, enquanto o eixo  $x$  representa o espaço percorrido por um fóton se movendo unidimensionalmente. Se realizarmos uma rotação em um eixo  $z$ , encontraríamos então dois cones, um superior ao eixo  $x$  e outro inferior. Esses cones são denominados “cones de luz” e determinam a região por onde qualquer outra partícula deve ser representada. As regiões proibidas representam uma região em que nada pode ser representado, pois ultrapassaria a velocidade da luz, se aplicássemos uma TL para obter seu referencial não encontraríamos valores no espaço que a descreveria, já que tudo deve estar dentro do cone de luz. Como a componente temporal é imaginária pura é comum encontramos funções hiperbólicas descrevendo o movimento de uma partícula nesse espaço.

Para ilustrar como não encontrar valores para uma TL no espaço de Minkowski pode ser contraditório podemos verificar como as TL podem ser representadas como uma rotação no espaço, transformando:

$$(9.1a) \quad \gamma = \cosh(\theta),$$

$$(9.1b) \quad \gamma\beta = \sinh(\theta).$$

Pois:

$$(9.2) \quad \cosh^2 - \sinh^2 = 1,$$

$$(9.3) \quad \gamma^2 - \gamma^2\beta^2 = \gamma^2(1 - \beta^2) = 1.$$

Podemos então escrever a matriz da TL como:

$$(9.4) \quad \begin{pmatrix} \cosh(\theta) & -\sinh(\theta) & 0 & 0 \\ -\sinh(\theta) & \cosh(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Para melhor representar o diagrama utilizado, deixaremos em duas coordenadas e evidenciaremos a variável  $t$ , lembrando que  $c=1$ ;

$$(9.5) \quad \begin{pmatrix} \cosh(\theta) & -\sinh(\theta) \\ -\sinh(\theta) & \cosh(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix}.$$

Podemos conferir que a determinante dessa matriz é igual a 1 e que a transposta dela é igual a sua inversa, provando que essa matriz representa uma rotação hiperbólica no espaço de Minkowski.

O espaço de Minkowski é eficaz em demonstrar um diagrama sobre o espaço-tempo. Em qualquer espaço-tempo podemos trabalhar com as coordenadas aplicadas ao exemplo anterior, com isso encontramos os quadrivetores que descrevem as leis de Newton no espaço-tempo. Para isso necessitamos fazer a conversão de todas as grandezas físicas para quatro coordenadas, por exemplo, o vetor velocidade agora passa a ter uma componente imaginária pura relacionada ao tempo, podemos definir a velocidade então em relação a um referencial inercial como:

$$(10.1a) \quad \mathbf{v} = \left( \frac{\partial x}{\partial \tau}, \frac{\partial y}{\partial \tau}, \frac{\partial z}{\partial \tau}, -\frac{\partial t}{\partial \tau} \right).$$

Sabemos que:

$$(10.1b) \quad t = \gamma\tau.$$

Logo:

$$(10.2) \quad \frac{\partial t}{\partial \tau} = \gamma,$$

(10.3)

$$\mathbf{v} = \left( \frac{\partial x}{\partial \tau}, \frac{\partial y}{\partial \tau}, \frac{\partial z}{\partial \tau}, -\gamma \right),$$

(10.4)

$$\mathbf{v} = \left( \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \tau}, \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \tau}, \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \tau}, -\gamma \right),$$

(10.5)

$$\mathbf{v} = (vx\gamma, vy\gamma, vz\gamma, -\gamma)$$

(10.6)

$$\mathbf{v} = (\gamma \vec{v}, -\gamma)$$

Com isso definimos o quadrivetor velocidade. Porém a partir da definição de velocidade podemos definir as outras grandezas físicas em quatro coordenadas, porém o as componentes agora dependem da velocidade da partícula no referencial inercial devido à presença do fator  $\gamma$ . Um exemplo seria o quadrivetor da aceleração, para simplificar os cálculos iremos considerar um movimento unidimensional no eixo x:

(11.1)

$$\mathbf{a} = \left( \frac{\partial(\gamma v_x)}{\partial \tau}, 0, 0, -\frac{\partial \gamma}{\partial \tau} \right),$$

(11.2)

$$\mathbf{a} = \left( \frac{\partial(\gamma v_x)}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \tau}, 0, 0, -\frac{\partial \gamma}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \tau} \right),$$

(11.3)

$$\mathbf{a} = \left( \frac{\partial(\gamma v_x)}{\partial t} \gamma, 0, 0, -\frac{\partial \gamma}{\partial t} \gamma \right),$$

(11.4)

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{\partial \left( \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \right)}{\partial t} = av\gamma^3,$$

(11.5)

$$\mathbf{a} = \left( \frac{\partial(\gamma v_x)}{\partial t} \gamma, 0, 0, -av\gamma^3 \right),$$

(11.6)

$$\mathbf{a} = \left( \frac{\partial(\gamma v)}{\partial t} \gamma, -av\gamma^3 \right),$$

(11.7)

$$\frac{\partial \gamma v}{\partial x} = \left( \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right) (v) + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right) (\gamma) = \gamma a (a^2 \gamma^2 + 1),$$

(11.8)

$$\mathbf{a} = (\gamma^4 av^2 + a\gamma^2, -av\gamma^4).$$



Podemos notar então que o quadrivetor de aceleração não depende apenas do vetor aceleração mas também do vetor velocidade. Se deduzirmos outros quadrivetores como o do momento encontraríamos que a componente imaginária seria a Energia, sendo assim o quadrivetor pode depender de outras grandezas físicas para ser representado.

#### 4.4 Geometria Não-Euclidiana

Foi abordado durante o projeto uma introdução de geometria em espaços curvos e como o espaço plano pode ser considerado uma aproximação da mesma. Como exemplo, podemos demonstrar que uma figura geométrica, como o círculo, possui propriedades diferentes quando está inscrito na superfície de uma esfera de raio R. Sabemos que a área de um círculo em coordenadas polares pode ser expressa como:

(12.1)

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta} R^2 \sin\theta d\theta dR.$$

Podemos considerar que o raio do círculo pode ser considerado um comprimento de arco, como mostra a figura abaixo:

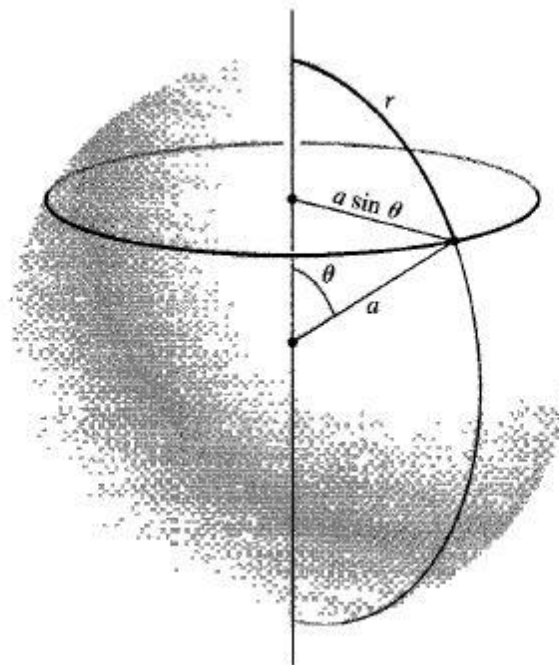


Figura 3: Representação de um círculo inscrito sobre a superfície de uma esfera. Retira da referência [5].

A partir disso temos que:

$$(12.2) \quad r = \theta R.$$

Resolvendo a integral e substituindo o valor de  $\theta$  pela razão dos raios, encontraríamos:

$$(12.3) \quad A = 2\pi R^2 \left(1 - \cos\left(\frac{r}{R}\right)\right).$$

Se considerarmos que  $R \gg r$  (muito maior), aplicando a expansão de Taylor no cosseno encontraríamos:

$$(12.4) \quad \cos\left(\frac{r}{R}\right) = 1 - \frac{\left(\frac{r}{R}\right)^2}{2!} + \dots,$$

Substituindo em (12.3) encontraríamos a fórmula conhecida pela geometria euclidiana da área do círculo.

## 5. CONCLUSÕES

O estudo da Relatividade Restrita mostrou como o universo gira em torno da velocidade da luz, tenta ultrapassá-la seria um “pecado” na física, implicaria em fenômenos estranhos como a reação premeditar a ação ou em outros paradoxos envolvendo o tempo. As noções de Relatividade Geral mostraram como a gravidade possui um comportamento geométrico, e uma geometria diferente da conhecida até então. De acordo com as ideias de Einstein nada pode superar a velocidade da luz, porém a literatura estudada no início do projeto prevê meios de se locomover no universo em velocidade maiores do que a luz levaria para chegar em determinada região, isso não implica que estaremos a uma velocidade superior a da luz mas sim em um truque, como o atalho de wormhole. Na próxima etapa do projeto estudaremos novas métricas, como a do espaço-tempo de warpdrive dado por:

$$(13) \quad ds^2 = -(dt)^2 + [dx - V_s f(r_s) dt]^2 + (dy)^2 + (dz)^2.$$

Os estudos do projeto irão continuar possuindo o intuito de uma análise do que deve ser superado para que as viagens com velocidades mais rápidas do que a luz sejam possíveis perante a física.

## 6. CRONOGRAMA PROPOSTO

**01/08/2012 a 30/09/2012:** Revisão da literatura. Estudo da teoria da relatividade especial, transformações de Lorentz, quadrivetores, intervalo, simultaneidade.

**01/10/2012 a 30/11/2012:** Noções de geometria diferencial, geometria em espaços curvos, vetores covariantes e contravariantes, métrica.

**01/12/2012 a 31/01/2013:** Fundamentos físicos da teoria da relatividade geral. Princípio da equivalência, espaço-tempo de Minkowski.

**01/02/2013 a 30/04/2013:** Espaços-tempo que descrevem wormholes. Conteúdo de matéria. Estabilidade. Possibilidade de viagens através do wormhole. Visualização.

**01/05/2013 a 31/07/2013:** Solução de Alcubierre para warpdrive. Estudo das condições necessárias. Estabilidade. Matéria exótica. Conclusões a respeito da possibilidade real de uso para transporte. Elaboração do relatório final.

## 7. REFERÊNCIAS

[1] FEYNMAN, Richard P.; LEIGHTON, Robert B.; SANDS, Matthew. **Lições de física de Feynman:** edição definitiva. Porto Alegre: Bookman, 2008. v. 2. 42-13 p.

[2] SCHUTZ, Bernard. **Gravity from the ground up.** New York: Cambridge University Press, 2003. 462 p.

[3] NUSSENZVEIG, H. Moysés. **Curso de física básica:** 4 ótica, relatividade, física quântica. São Paulo: E. Blücher, 1998. v. 4. 437 p.

[4] GAZZINELLI, Ramayna. **Teoria da relatividade especial.** 2 ed. São Paulo: Editora Blucher, 2009. 147 p.

[5] HARTLE, James B. **Gravity:** an introduction to Einstein's general relativity. San Francisco, EUA: Addison Wesley, c2003. xxii, 582 p.