

Universidade Federal do ABC
Graduação em Ciência e Tecnologia

Anderson Carlos dos Santos

VISUALIZAÇÃO E ESTUDO DE WARP DRIVE E WORMHOLES

Relatório de Iniciação Científica - PIBIC

Santo André – SP

2014

Anderson Carlos dos Santos

VISUALIZAÇÃO E ESTUDO DE WARPDRIVE E WORMHOLES

Relatório de Iniciação Científica - PIBIC

Relatório do projeto de iniciação científica apresentado à Universidade Federal do ABC,
como requisito para obtenção do certificado.

Orientadora: Prof(a). Dr(a). Cecilia B. M. H. Chirenti

Santo André – SP

2014

Resumo

Os buracos de minhoca (wormholes) e a dobra espacial (warp drive) são duas especulações físicas que podem permitir, em futuro distante, viagens com velocidades muito superiores às possíveis hoje. Ambas as teorias foram desenvolvidas após a Relatividade Geral de Einstein e seguem seu princípio. No entanto, o desenvolvimento dessas tecnologias ainda possui impedimentos físicos, sendo possível apenas através de simulações matemáticas. O estudo e a visualização de ambas as teorias podem proporcionar grandes desenvolvimentos tecnológicos assim como nortear qual método pode representar a melhor maneira de driblar a velocidade da luz.

Palavras Chaves: Astrofísica, Relatividade, Transporte, Velocidade.

Abstract

Wormholes and warp drive are two physical speculations that can enable, in the distant future, travel at speeds much higher than possible today. Both theories were developed after Einstein's General Relativity and follow its principle. However, the development of these technologies still has physical impediment, being possible only through mathematical simulations. The study and visualization of both theories can provide major technological developments as well as guide which method may represent the best way to circumvent the speed of light.

Key words: Astrophysics, Relativity, Transportation, Speed.

Sumário

1. Introdução.....	6
2. Objetivo	7
3. Metodologia.....	8
3.1 Wormhole	8
3.2 Warp Drive	9
4. Desenvolvimento e Resultados.....	7
4.1 Visualização de um wormhole.....	10
4.2 Trajetória no wormhole	13
4.3 Matéria exótica no wormole	21
4.4 Transporte com wormhole	23
4.5 Visualização do warp drive	24
4.6 Trajetória no warp drive	26
4.7 Matéria exótica no warp drive	28
4.8 Transporte com warp drive	29
5. Conclusão	31
6. Cronograma	31
7. Referências	32

1. Introdução

A teoria da Relatividade Geral proposta por Einstein em 1915 é a melhor forma de descrever o universo em grandes escalas. Desde que foi proposta o entendimento do universo foi ampliado e suas equações revelaram fenômenos nunca antes imaginados.

A velocidade da luz tem um papel fundamental desde a teoria da Relatividade Restrita. Segundo Einstein sua velocidade seria o máximo absoluto permitido pelo universo, e teria o mesmo valor em qualquer referencial. Essa afirmação foi crucial para a revolução no entendimento de tempo que temos hoje, de algo que pode variar assim como o espaço, dando origem ao que chamamos de espaço-tempo.

Contudo, mesmo a velocidade da luz sendo extremamente rápida para os nossos padrões diários, ela não é suficiente para se locomover “rapidamente” pelo universo. Distâncias astrofísicas citam frequentemente dezenas, milhares e milhões de anos luz de distância, de modo que seria impossível viajar pelo universo em curtos prazos de tempo em velocidade luminal.

Assim, novos modelos de transporte pelo universo foram propostos com a intenção de driblar a limitação da velocidade da luz imposta. Os modelos citados envolvem soluções exóticas como o wormhole e o warp drive. Embora sua aplicação não seja útil em um futuro próximo o estudo de tais soluções pode ser um fator de extrema importância para um desenvolvimento em longo prazo.

Wormholes são objetos de estudo matemáticos relativísticos precedentes dos buracos negros. Após apenas um ano da formulação das equações de campo de Einstein, Ludwig Flamm reorganizou a solução de Schwarzschild representando um wormhole. Outros buracos de Schwarzschild foram estudados por Einstein e Nathan Rosen nos anos de 1930 e por John Wheeler nos anos de 1950.^[1]

No entanto os wormholes de Schwarzschild apresentam características que descartam a possibilidade de viagens interestelares, como:

- (1) As forças de maré na garganta do wormhole de Schwarzschild são de mesma magnitude do interior de um buraco negro. O que faria que qualquer viajante morresse ao tentar atravessá-lo.
- (2) Um wormhole de Schwarzschild seria dinâmico e não estático. O que faria com que sua garganta abrisse e fechasse em curtos intervalos de tempos que nem mesmo na

velocidade da luz alguém seria capaz de atravessá-lo sem escapar da gravidade de maré.

(3) O wormhole de Schwarzschild seria muito instável.

Em 1988 Mike Morris e Kip Thorne propuseram o wormhole transitável construído de modo desconhecido por uma tecnologia de civilização avançada, porém matematicamente possível. O wormhole se baseava como descrito no livro Contato de Carl Sagan, permitindo viagens pelo universo através de atalhos.

O wormhole no entanto não é a única solução proposta para se viajar mais rápido do que a velocidade da luz. Em 1994 o físico mexicano Miguel Alcubierre propôs uma solução que possibilitaria viagens interestelares como as da USS Enterprise da série Star Trek. A solução recebeu o nome de warp drive, criando uma métrica que fosse capaz de empurrar a espaçonave que de certa forma permitiria uma viagem mais rápida do que a luz gastaria para viajar até certo ponto em trajetória retilínea.

O wormhole proposto por Morris e Thorne e o warp drive de Alcubierre representam uma curvatura no espaço-tempo de acordo com as equações de Einstein. Em ambas soluções deve haver um material que exerça uma tensão radial τ_0 de grande magnitude. No entanto essa tensão deve exceder o limite usual de densidade de massa-energia da matéria comum, $\rho_0 c^2$.^[1] Esse efeito viola as condições de energia conhecida, denominando-se exótica a matéria cujo seja necessária para sua criação. Nos dias atuais não é possível afirmar com certeza a existência desse material, contudo a teoria quântica apresenta resultados que dizem que tal material pode ser, de fato, possível.^[1] No trabalho não será discutida a natureza quântica da matéria.

2. Objetivo

O objetivo final do projeto é analisar as soluções do wormhole de Morris-Thorne e o warp drive de Miguel de Alcubierre e por meio das análises utilizadas sugerir qual a melhor opção de se conseguir viagens mais rápidas do que a velocidade da luz.

3. Metodologia

3.1 Wormhole

O wormhole transitável foi proposto por Michael S. Morris e Kip S. Thorne em 1988. Para sua construção partimos de condições necessárias e superando as limitações ocorrentes nos wormholes de Schwarzschild, sendo as:

- (1) Possuir uma métrica com simetria esférica e estática, para simplificação dos cálculos;
- (2) A solução deve obedecer às equações de campo de Einstein;
- (3) A garganta da solução do wormhole deve conectar duas regiões assintoticamente planas no espaço-tempo;
- (4) Não deve haver nenhum horizonte de eventos;
- (5) As forças de maré devem ser suficientemente pequenas para que um viajante possa atravessá-lo e sobreviver;
- (6) Um viajante deve ser capaz de atravessar o wormhole e voltar em um intervalo de tempo suficiente para que possa realizar contato com o observador que ficou parado do lado de fora do wormhole;
- (7) A solução deve ser estável, ao menos para a passagem de uma espaçonave;
- (8) Possibilidade de montar um wormhole, por exemplo: exigir menos matéria do que disponível em todo universo ou energia;
- (9) A matéria do campo gerado pela curvatura do espaço-tempo do wormhole deve ser fisicamente relacionada ao tensor de energia-momento.

Em posse dos requerimentos, podemos construir a seguinte métrica:

$$ds^2 = -e^{2\Phi} c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{b}{r}} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2). \quad (1)$$

Onde, $\Phi=\Phi(r)$ é a função de redshift e $b = b(r)$ é a “função da forma” (shape function), sendo ambas duas funções arbitrárias dependentes apenas do raio, e c a velocidade da luz.

Essa é a métrica geral para um wormhole. Para seu estudo é necessário o conhecimentos dos símbolos de Christoffel e do tensor de curvatura de Riemann, sendo ambos definidos respectivamente como:

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}(g_{\lambda\beta,\gamma} + g_{\lambda\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\lambda}); \quad (2)$$

$$R_{\beta\gamma\delta}^{\alpha} = \Gamma_{\beta\delta,\gamma}^{\alpha} - \Gamma_{\beta\gamma,\delta}^{\alpha} + \Gamma_{\lambda\gamma}^{\alpha}\Gamma_{\beta\delta}^{\lambda} - \Gamma_{\lambda\delta}^{\alpha}\Gamma_{\beta\gamma}^{\lambda}. \quad (3)$$

Onde $g_{\alpha\beta,\gamma} = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}}$.

De posse de tais definições, podemos encontrar o tensor de Ricci e o escalar de curvatura através do tensor de Riemann, realizando contrações. Já o tensor de Einstein pode ser obtido através da seguinte fórmula:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}. \quad (4)$$

O $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci, R o escalar de curvatura e $g_{\mu\nu}$ o coeficiente métrico covariante. Também será usada uma base de vetores ortonormal do próprio sistema referencial.

3.2 Warp Drive

O modelo do warp drive foi proposto pelo físico mexicano Miguel Alcubierre em 1994. A métrica para o modelo apresenta o formalismo 3+1 da Relatividade Geral, no formalismo o espaço-tempo é representado por uma foliação de hipersuperfícies do tipo espaço em uma coordenada “t” constante. ^[2] Podendo ser escrita da seguinte maneira:

$$ds^2 = -(\alpha^2 - \beta_i\beta^i)dt^2 + 2\beta_i dx^i dt + \gamma_{ij} dx^i dx^j. \quad (5)$$

Onde α é a função lapso que dá o valor do intervalo de tempo próprio entre duas hipersuperfícies próxima. β^i é o vetor deslocamento que relaciona a coordenada espacial entre hipersuperfícies diferentes e γ_{ij} é a métrica 3-dimensional (espacial).

Assumiremos que se espaçonave move ao longo do eixo x de coordenadas cartesianas. Para encontrar uma métrica que “empurre” a espaçonave ao longe da trajetória descrita por uma função arbitrária dependente do tempo $x_s(t)$, a métrica possuirá as seguintes propriedades, considerando ($G=c=1$).

$$\alpha = 1; \quad (6.a)$$

$$\beta^x = -v_s(t)f(r_s(t)); \quad (6.b)$$

$$\beta^y = \beta^z = 0; \quad (6.c)$$

$$\gamma_{ij} = \delta_{ij}. \quad (6.d)$$

Onde:

$$v_s(t) = \frac{dx_s(t)}{dt}; \quad (7.a)$$

$$r_s(t) = \left[(x - x_s(t))^2 + y^2 + z^2 \right]^{\frac{1}{2}}; \quad (7.b)$$

$$f(r_s) = \frac{\tanh(\sigma(r_s + R)) - \tanh(\sigma(r_s - R))}{2 \tanh(\sigma R)}. \quad (7.c)$$

Onde $R > 0$ e $\sigma > 0$ são parâmetros arbitrários. Assim podemos reescrever a métrica (5) da seguinte maneira:

$$ds^2 = -dt^2 + (dx - v_s f(r_s) dt)^2 + dy^2 + dz^2. \quad (8)$$

Sendo essa a métrica trabalhada durante o projeto utilizando as mesmas definições citadas no item 3.1.

* Foi conservada a notação do material de referência, onde os índices gregos representam as coordenadas espaciais e temporal, e os índices romanos representam apenas as coordenadas espaciais no espaço-tempo.

** O índice “s” representa a grandeza de acordo com a espaçonave, “ship”.

4. Desenvolvimento e Resultados

4.1 Visualização de um Wormhole

Como pode ser notada na equação (1), a métrica geral do wormhole de Morris-Thorne possui a liberdade de várias soluções que a satisfazem, dependendo da função de forma e da função de redshift. Alterando os valores de suas componentes, podemos encontrar

soluções que minimize os efeitos da matéria exótica ou anule as forças de maré entre as alternativas. Para o estudo de um wormhole a solução mais simples para se trabalhar é dada pela métrica:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dl^2 + (b_0^2 + l^2)(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2). \quad (9.1)$$

Onde l é a posição no referencial próprio do viajante, limitada em: $-\infty < l < \infty$, θ e φ a posição em relação ao eixo em coordenadas esféricas limitado em: $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ e b_0 uma constante arbitrária positiva (diferente de zero) que definirá o raio da garganta do wormhole como será mostrado adiante.

A visualização do espaço representado é complicada por se tratar de um diagrama de quatro dimensões, no entanto pode-se construir um diagrama imerso no plano equatorial em determinado tempo fixo “ t ”, para isso igualamos $\theta = \pi/2$; válido lembrar que devido a propriedade (1), da métrica do wormhole, a métrica possui simetria esférica e não há perda de generalidade ao definirmos um valor de θ . Assim podemos reescrever a métrica com essas propriedades em função de um referencial de um observador parado, substituindo: $l^2 = r^2 - b_0^2$.

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{b_0^2}{r^2}} + r^2 d\varphi^2. \quad (9.2)$$

Podemos relacionar a métrica encontrada com a métrica euclidiana em coordenadas cilíndricas, encontrando a relação:

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{b_0^2}{r^2}} + r^2 d\varphi^2 = dz^2 + dr^2 + r^2 d\varphi^2. \quad (10)$$

Assim conseguimos construir uma dimensão auxiliar “ z ” que nos ajudar a visualizar a métrica. Organizando a equação encontramos a seguinte relação para z :

$$\frac{dz}{dr} = \pm \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{b_0^2}{r^2}} - 1}. \quad (11.1)$$

A solução da equação diferencial nos dá o eixo z dependente de r, e seguindo a parametrização usada na referência [3], encontramos:

$$z = \pm b_0 \ln \left(\frac{r}{b_0} + \sqrt{\frac{r^2}{b_0^2} - 1} \right) = \pm \operatorname{arccosh} \left(\frac{r}{b_0} \right). \quad (11.2)$$

Assim o diagrama do wormhole imerso no espaço euclidiano com coordenadas cilíndricas é representado pela seguinte imagem:

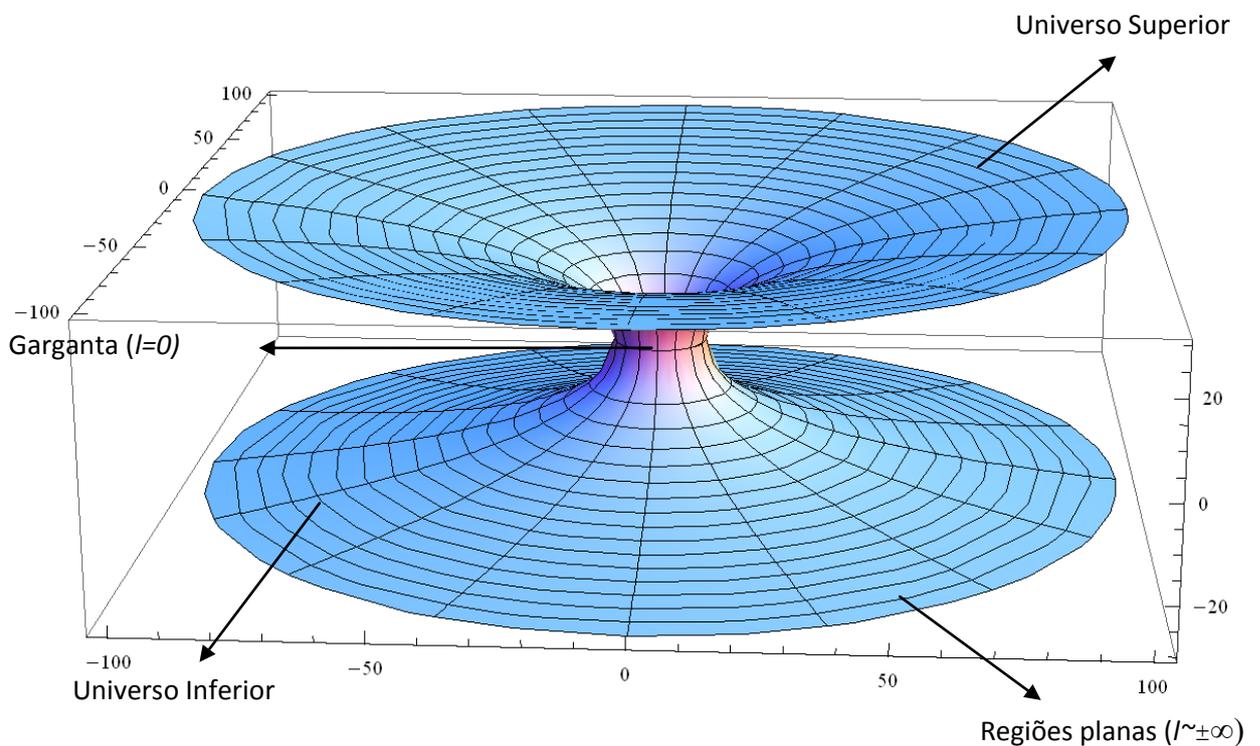


Figura 1. Diagrama de um wormhole transitável, imerso no espaço euclidiano com coordenadas cilíndricas, com valor de $b_0 = 10$.

A figura 1 construída no Mathematica mostra uma representação de um wormhole especificado pela métrica (9.1), ajudando a interpretar o espaço-tempo e a curvatura estudados.

4.2 Trajetória no Wormhole

As geodésicas são trajetória de partículas em queda livre que representam o menor caminho entre dois pontos. Podemos visualizar o comportamento de algo passando pelo wormhole através de seu estudo. No entanto, quando usamos partículas nos referimos a geodésicas do tipo tempo (timelike), para visualização iremos usar geodésicas formadas por raios de luz (null), pois a distância ao longo de um raio de luz no espaço-tempo é zero^[4], facilitando um pouco os cálculos. Em geral as geodésicas são calculadas numericamente, no entanto a métrica simplificada do wormhole (9.1) apresenta uma solução analítica quando utilizamos um tempo constante e um valor fixo de θ ^[5], que no caso será: $\theta=\pi/2$. As geodésicas que nos interessa são as arbitrarias, no qual encontramos a relação $\varphi(r)$ ou $r(\varphi)$.

Podemos chegar às equações de geodésica através do formalismo de Lagrange. A Lagrangeana pode ser definida como:

$$L = g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu. \quad (12)$$

Por se tratar de geodésicas do tipo luz, temos $L=0$. Segue da equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0. \quad (13)$$

Ao solucionarmos a equação (13) definimos duas novas constantes de movimentos, para simplificarmos a expressão, portanto temos: $k = c^2\dot{t}$ e $h = (b_0^2 + l^2)\dot{\varphi}$. Substituindo as constantes definidas na equação (12) obtemos:

$$l^2 = \frac{k^2}{c^2} - \frac{h^2}{b_0^2 + l^2}. \quad (14)$$

Para calcularmos as geodésicas arbitrarias iremos considerar o movimento orbital $l=l(\varphi)$. Para isso precisamos da relação de $dl/d\varphi$. Em termos da equação (14) conseguimos a expressão:

$$\left(\frac{dl}{d\varphi}\right)^2 = \frac{l^2}{\dot{\varphi}^2} = \frac{\left(\frac{k^2}{c^2}\right)(b_0^2 + l^2)^2}{h^2} - (b_0^2 + l^2). \quad (15)$$

Podemos substituir l por r , para simplificarmos a equação definimos uma nova constante a , e deixamos r em função de uma nova variável p :

$$a = \frac{b_0 k}{ch}, r = \frac{b_0}{ap}. \quad (16a,b)$$

$$\left(\frac{dp}{d\varphi}\right)^2 = (1 - a^2 p^2)(1 - p^2). \quad (17)$$

A equação (17) nos dá a órbita da geodésica. Para sua solução, primeiro iremos reescrever as constantes k e h em função das condições iniciais. As condições iniciais são dadas pela posição inicial (t_i, l_i, φ_i) e pela direção y em relação ao referencial local. Assim relacionando os termos com as coordenadas curvilíneas e com a variação do deslocamento temos:

$$y = y^t \mathbf{e}_t + c \cos \xi \mathbf{e}_l + c \sin \xi \mathbf{e}_\varphi = \frac{y^t}{c} \partial_t + c \cos \xi \partial_l + \frac{c \sin \xi}{\sqrt{b_0^2 + l^2}} \partial_\varphi = \dot{t} \partial_t + \dot{l} \partial_l + \dot{\varphi} \partial_\varphi. \quad (18)$$

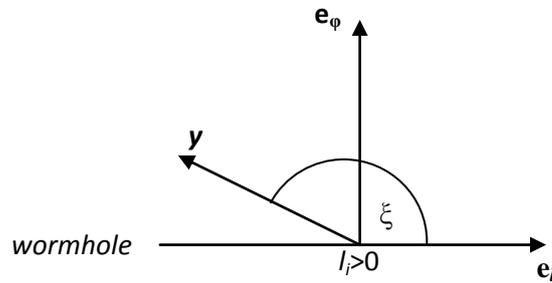


Figura 2. Direção inicial y em relação ao referencial local.
Sem perda de generalidade temos $l_i > 0$ e $0 \leq \xi \leq \pi$.

Assim conseguimos os novos valores de k e h em funções das condições iniciais, sendo $k = \pm c^2$ e $h = c(b_0^2 + l_i^2)^{1/2} \sin \xi$.

O ângulo ξ é importante na solução da equação (18), pois podemos relacioná-lo com o potencial efetivo e determinar um ângulo crítico no qual a geodésica se conduz assintoticamente pela garganta, assim determinamos o valor de a (que agora pode também ser reescrito em função de ξ , assim como p) de acordo com a condição inicial ξ dada. Mais detalhes podem ser visto na referência [5]. O ângulo crítico é dado pela equação:

$$\xi_{crit} = \arcsen\left(\frac{b_0}{\sqrt{b_0^2 + l_i^2}}\right). \quad (19)$$

Assim temos as seguintes condições para a solução da equação (17):

$$a = \begin{cases} < 1, \text{ para } \xi_{crit} < \xi < \pi - \xi_{crit} \\ = 1, \text{ para } \xi = \xi_{crit} \\ > 1, \text{ para } \xi < \xi_{crit} \text{ ou } \xi > \pi - \xi_{crit} \end{cases}. \quad (20)$$

Para o primeiro caso, temos que a solução da equação (17) resultada na integral:

$$\varphi = \pm \int_{p_i}^p \frac{dp}{\sqrt{(1 - a^2 p^2)(1 - p^2)}}. \quad (21)$$

Onde o lado direito é definimos que é dado pela integral elíptica da função F . Assim podemos definir:

$$\varphi = \pm [F(p, a) - F(\text{sen}\xi, a)]. \quad (22)$$

O inverso da função da integral elíptica da função F será expressa através das funções elípticas de Jacobi (sn,dn,cn). O inverso de (22) é:

$$p = \frac{\left[-\text{sn}(\varphi, a) \cos\xi \sqrt{1 - b_i^2} + \text{sen}\xi \text{cn}(\varphi, a) \text{dn}(\varphi, a) \right]}{\left[1 - b_i^2 \text{sn}^2(\varphi, a) \right]}. \quad (23)$$

Onde $b_i = \frac{b_0}{\sqrt{b_0^2 + l_i^2}}$.

Reorganizando a equação (19b) temos que:

(24)

$$l(\varphi) = \text{sign}(l_i) b_0 \sqrt{\frac{1}{a^2 p^2} - 1}.$$

Onde *sign* representa o sinal de l_i necessário, pois a geodésica se encontra no universo em que começa (inferior ou superior (figura 1)), pois para $a < 1$ a geodésica não atravessa a garganta. Dessa forma, conseguimos a relação final de $r=r(\varphi)$ em função das funções apresentadas.

Para visualizar o comportamento dessa geodésica iremos definir os valores de algumas constantes e plotar os gráficos utilizando o Mathematica, a representação na superfície imersa será feita utilizando o aplicativo do WolframAlpha, disponível na referência [6]:

Exemplo 1:

$\xi=16^\circ$, $b_0=2$, $r_i=8$, $a=0,907$, $b_i=0,25$.

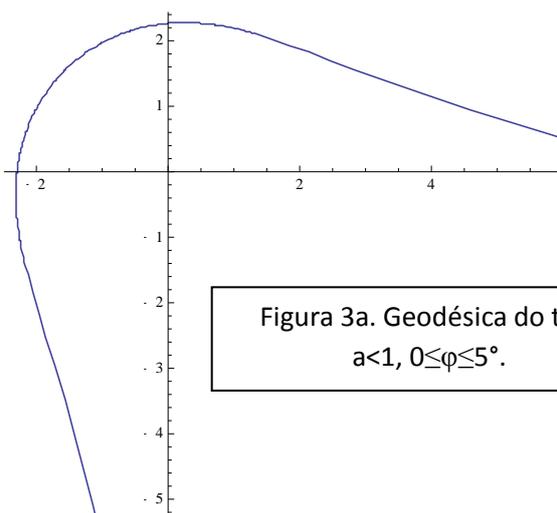


Figura 3a. Geodésica do tipo $a < 1$, $0 \leq \varphi \leq 5^\circ$.

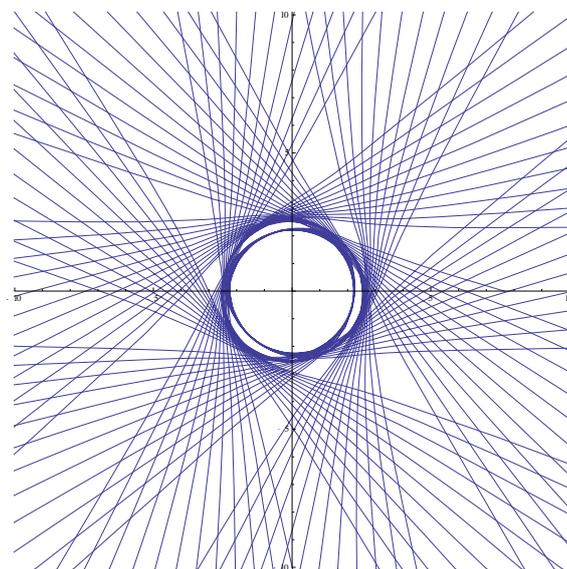


Figura 3b. Família de Geodésicas do tipo $a < 1$, $0 \leq \varphi \leq 360^\circ$.

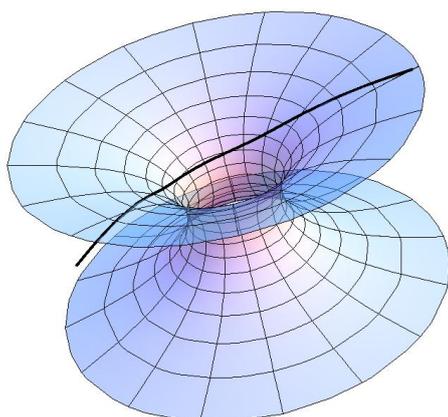


Figura 3c. Representação da geodésica na superfície imersa.

Como segundo caso iremos tratar da solução quando $a > 1$, nesse caso a geodésica deve atravessar a garganta ou recuar para o infinito. Em ambos os casos iremos usar a função inversa de a , $\alpha = 1/a$.

(25)

$$\frac{\varphi}{\alpha} = \pm \int_{p_i/\alpha}^{p/\alpha} \frac{dp}{\sqrt{(1 - \alpha^2 p^2)(1 - p^2)}}.$$

De maneira similar, encontramos o valor de p dado por:

(26)

$$p = \frac{\left[-sn(a\varphi, \alpha) \cos \xi \sqrt{1 - b_i^2} + b_i cn(a\varphi, \alpha) dn(a\varphi, \alpha) \right]}{a[1 - \text{sen}^2 \xi sn^2(a\varphi, \alpha)]}.$$

Chegando na relação final:

(27)

$$l(\varphi) = \text{sign}(\varphi_{garganta} - \varphi) \text{sign}(l_i) b_0 \sqrt{\frac{1}{\alpha^2 p^2} - 1}.$$

$$\varphi_{garganta} = \alpha K(\alpha) - \alpha F(b_i, \alpha). \quad (28)$$

$$K(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{\sqrt{1 - \alpha^2 \text{sen}^2 \omega}}. \quad (29)$$

Este caso representa o exemplo mais importante para este trabalho, pois a partícula em teste atravessará a garganta. No primeiro exemplo é possível notar com as imagens que a partícula passar perto da garganta mas continua no mesmo universo, não chegando na região de raio 2, já nesse exemplo a partícula contornará a região de raio 2 evidenciando o transporte pelo “túnel” no espaço-tempo.

Exemplo 2:

$\xi=10^\circ$, $b_o=2$, $r_i=8$, $a=1,43$, $b_i=0,25$, $\alpha=0,69$.

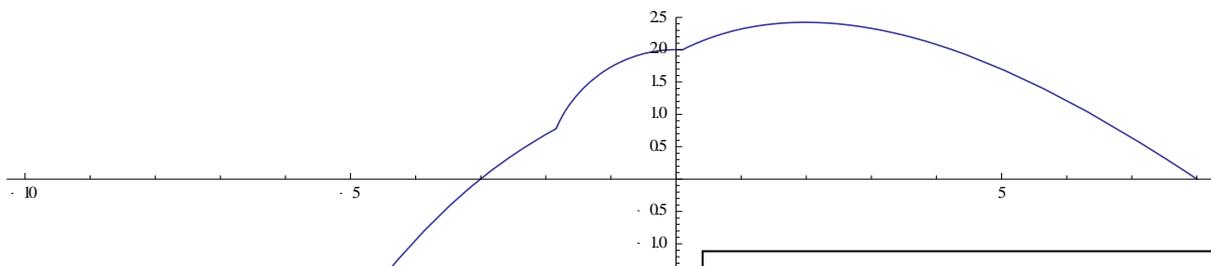


Figura 4a. Geodésica do tipo $a>1$, $0 \leq \varphi \leq 4^\circ$.

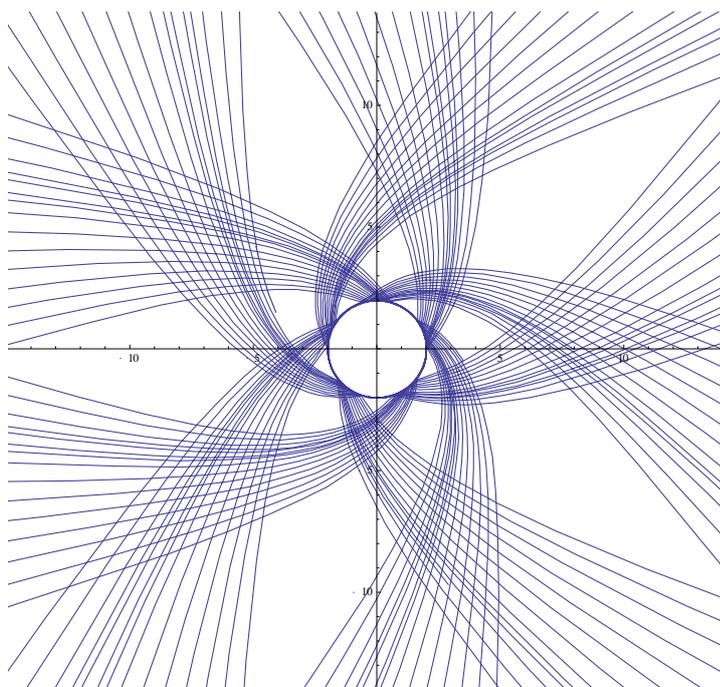
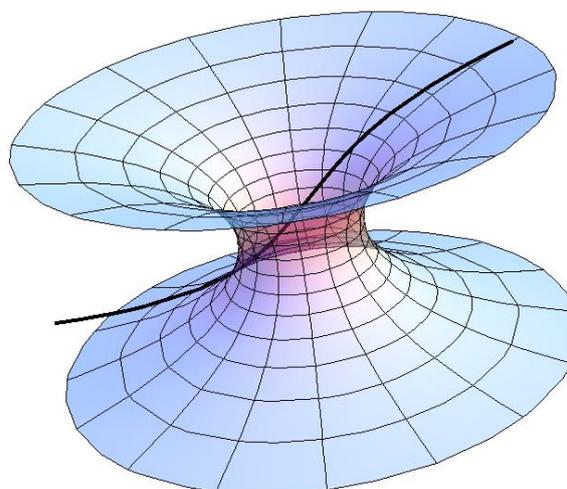


Figura 4b. Família de Geodésicas do tipo $a>1$, $0 \leq \varphi \leq 360^\circ$.

$$\xi_{\text{krit}} = 14.4775^\circ$$

$$\phi_{\text{max}} = 136.306^\circ$$

Figura 4c. Representação da geodésica na superfície imersa.



Em último caso, temos $a=1$. Isso implica que devemos usar exatamente o ângulo crítico definido anteriormente. A solução da equação (17) se resume a:

$$\varphi = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{(b_i \pm 1)(p \pm 1)}{(b_i \pm 1)(p \pm 1)} \right]. \quad (30)$$

Consequentemente segue:

$$p = \frac{\pm \operatorname{senh} \varphi \operatorname{cosh} \varphi (1 - b_i^2) + b_i}{\operatorname{cosh}^2 \varphi - b_i^2 \operatorname{senh}^2 \varphi}. \quad (31)$$

$$l^\pm = b_0 \sqrt{\frac{1}{p^2} - 1}. \quad (32)$$

Exemplo 3:

$\xi=14,4775^\circ$, $b_o=2$, $r_i=8$, $a=1$, $b_i=0,25$.

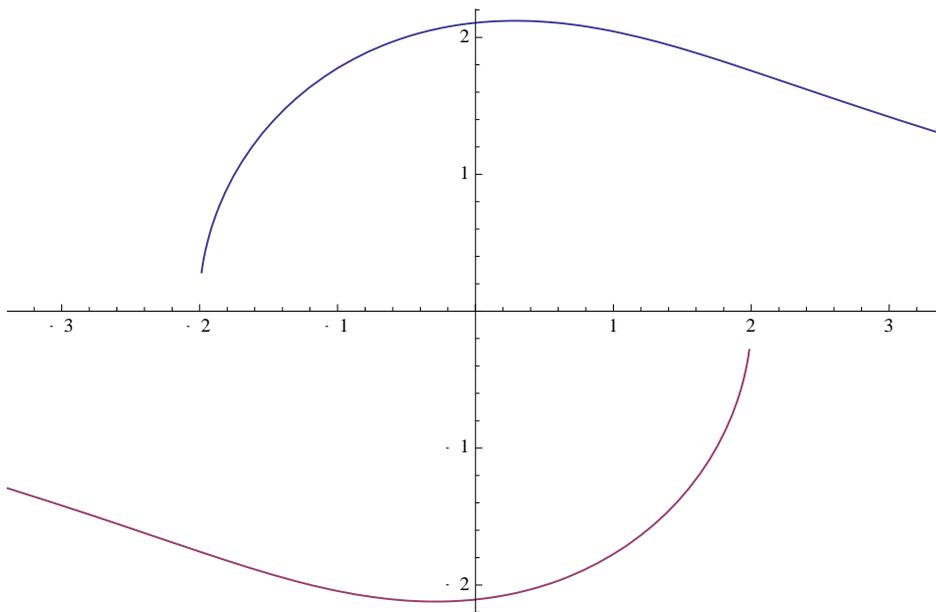


Figura 5a. Geodésica do tipo $a=1$,
 $0 \leq \varphi \leq 3$.

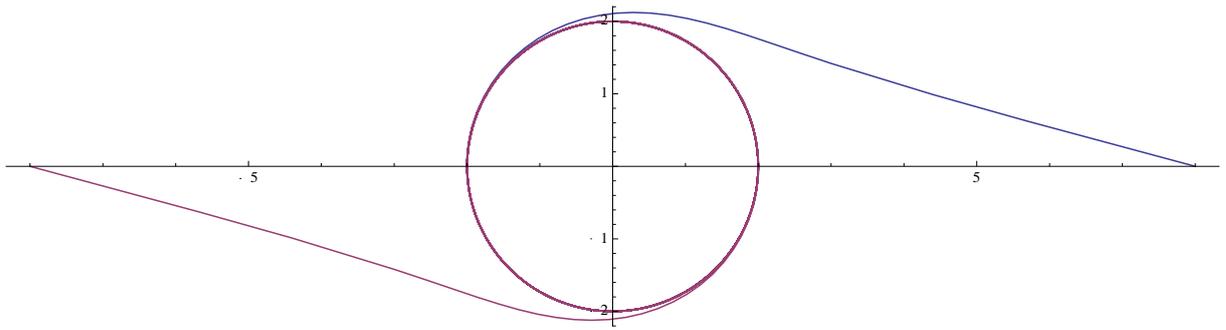


Figura 5b. Geodésica do tipo a=1,
 $0 \leq \varphi \leq 360^\circ$.

$$\xi_{\text{krit}} = 14.4775^\circ$$

$$\phi_{\text{max}} = 907.19^\circ$$

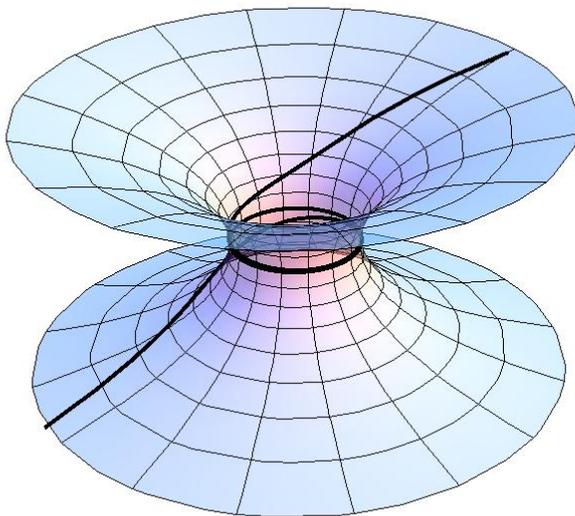


Figura 5c. Representação da geodésica na
 superfície imersa.

Nesse caso seria impossível prever para qual universo (superior ou inferior) teria destino a partícula estudada.

4.3 Matéria Exótica no Wormhole

A matéria exótica aparece necessariamente nas equações de campo de Einstein ao utilizarmos a solução geral de um wormhole. Através das equações citadas na seção de metodologia conseguimos encontrar os tensores de Einstein que são dependentes da função de forma, da função de redshift e do raio. Sendo, no caso geral igual a:

$$G_{tt} = \frac{b'}{r^2}; \quad (33a)$$

$$G_{rr} = -\frac{b}{r^3} + \frac{2\left(1 - \frac{b}{r}\right)\Phi'}{r}; \quad (33b)$$

$$G_{\theta\theta} = G_{\varphi\varphi} = \left(1 - \frac{b}{r}\right)\left(\Phi'' - \frac{b'r - b}{2r(r-b)}\Phi' + (\Phi')^2 + \frac{\Phi'}{r} - \frac{b'r - b}{2r^2(r-b)}\right). \quad (33c)$$

Segue das equações de Einstein que:

$$G_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ab}. \quad (34)$$

Onde G é a constante gravitacional de Newton com valor de $6,67384 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$, e T_{ab} o tensor energia-momento.

Usando a mesma base vetorial por um observador parado, podemos dizer que a matriz correspondente ao tensor energia-momento é dada por:

$$T_{ab} = \begin{pmatrix} \rho(r)c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\tau(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p(r) \end{pmatrix}. \quad (35)$$

Onde $\rho(r)$ é a densidade total de masa-energia, τ é a tensão por unidade de área medida em direção radial e $p(r)$ é a pressão medida nas direções laterais (ortogonais a radial).

Desse modo, após algumas manipulações matemáticas, é possível isolar as componentes do tensor energia-momento em relação às funções da métrica. Sendo cada componente dada por:

$$\rho = \frac{b'}{8\pi G c^{-2} r^2}; \quad (36a)$$

$$\tau = \frac{\frac{b}{r} - 2(r-b)\Phi'}{8\pi G c^{-4} r^2}; \quad (36b)$$

$$p = \left(\frac{r}{2}\right) ((\rho c^2 - \tau)\Phi' - \tau'). \quad (36c)$$

Na garganta do wormhole temos, $r=b=b_0$, onde ρ e p dependem da função de forma, enquanto τ depende apenas de b_0 . Consequentemente é possível obter o valor da tensão na garganta em função de b_0 :

$$\tau = (8\pi G c^{-4} b_0^2)^{-1} = 5 \times 10^{40} \left(\frac{10m}{b_0}\right)^2 N/m^2. \quad (37)$$

Para analisar as tensões na garganta e em sua vizinhança, definimos a seguinte função sem dimensão, no lado direito temos a mesma função substituída pelas equações (36a) e (36b) da métrica geral do wormhole^[7]:

$$\zeta = \frac{\tau - \rho c^2}{|\rho c^2|} = \frac{\frac{b}{r} - b' - 2(r-b)\Phi'}{|b'|}. \quad (38)$$

Conseguimos relacionar a função definida (38) com a função de superfície imersa (9.1) na forma genérica, a segunda derivada do inverso da função (9.1), pelo diagrama, deve satisfazer a igualdade $d^2r/dz^2 > 0$, na garganta e na região próxima. Assim relacionando a segunda derivada e lembrando que a função Φ e b são limitadas devido à ausência de horizontes na garganta, encontramos que $\zeta > 0$, para $r=b=b_0$.

No entanto para a condição ser respeitada, precisamos ter um $\tau_0 > \rho_0 c^2$. O que faz com que um viajante que passe pela garganta em velocidade próxima a da luz, veja uma matéria com densidade de massa-energia negativa, violando as condições de energia conhecidas^[8]. A densidade de energia negativa surge da equação seguinte.

$$\rho c^2 = \gamma^2 (\rho_0 c^2 - \tau_0) + \tau_0. \quad (39)$$

Onde $\gamma \gg 1$, movendo suficientemente rápido, e ρ_0 é a densidade de energia na garganta vista pelo viajante próximo e τ_0 a tensão no mesmo ponto.

4.4 Transporte com wormhole

Diante dos itens mostrado anteriormente é possível fazer um estimativa do que seria necessário e do tempo gasto para uma viagem através do wormhole. Podemos usar como referência a estrela Vega que fica a 25 anos-luz da Terra.

De acordo com a equação (37) sabemos que quando $b_0=3\text{km}$, teremos a tensão igual a do centro da maioria das estrelas de nêutrons massivas, sendo portanto algo já existente. Assim podemos reescrever a métrica (9.1) em função do raio e do valor de b_0 citado:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + \left(\frac{1}{1 - \frac{b_0^2}{r^2}} \right) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\varphi^2) \quad (40)$$

Utilizaremos esse valor para métrica, queremos posicionar o wormhole a uma distância em que a Terra e a estrela Vega não seja influenciada pela perturbação. Assim teremos uma distância r , até a garganta de: 100km. Os valores de referência de r são para que na métrica (1), $(1-b(r)/r)$ difere apenas em torno de 1% da região plana, sendo assim pouco influenciada pela curvatura, obtendo um valor de 30km, como o valor é bastante pequeno foi ampliado para 100Km apenas por comodidade.

Para esse caso, podemos calcular a massa necessária para sua construção integrando no ângulo sólido a densidade de energia dada pela equação (36a). A equação (37) nos fornece a tensão causada pelo o wormhole sem a necessidade de uma forma específica, assim ao substituimos b_0 por 3Km:

$$m = \int_{b_0}^{\infty} \frac{b'(r)}{8\pi G c^{-2} r^2} 4\pi r^2 dr \cong -1.61 \times 10^{29} \text{kg}. \quad (41)$$

Onde G é a constante gravitacional de Newton com valor de $6,67384 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$, c a velocidade da luz sendo igual a 300.000km/s) e considerando que o material necessário se estenda até o infinito, porém seja desprezível longe da garganta.

Além da energia necessária, para uma eventual viagem a Vega o tempo gasto de viagem é uma das propriedades mais importantes desse tipo de transporte. O wormhole aqui trabalhado espera-se que seja construído com uma tecnologia de civilização avançada na qual permitiria que pudesse ser criado no ponto em que desejamos do universo. Assim consideraremos que a Terra e a estrela Vega ficam em uma distante equidistante da garganta, de acordo com a figura 4, o planeta estaria no universo superior e a estrela no inferior ou vice-versa. Isso faz com que o tempo de viagem limita-se em viajar até a garganta e lá aja um portal que torne possível o transporte, assim a espaçonave leva um tempo de ida para chegar à garganta e o mesmo tempo da garganta ao destino.

Assim, para uma métrica de wormhole (40), resultaria na seguinte expressão para o cálculo do tempo de viagem:

$$\Delta\tau \approx \Delta t \approx \int_{l_{-1}}^{l_2} \frac{dl}{v}. \quad (42)$$

Onde τ representa o tempo no referencial do viajante e t o tempo no referencial do observador que difere pouco devido à $\gamma \approx 1$, devido a velocidade relativamente baixa $0,00026c$, v é a velocidade própria da espaçonave e l_2 e l_{-1} a distância percorrida da origem ou do destino até a garganta, sendo 100Km em cada percurso.

Assim a espaçonave Voyager 1 que possuía uma velocidade de aproximadamente 278.280km/h gastaria aproximadamente 2,6 segundos em viagem da Terra até Vega. Será permanecido o valor da velocidade da espaçonave para comparação com o warp drive.

4.5 Visualização do Warp Drive

Diferente da métrica do wormhole na métrica do warp drive já foi definida a função em que será dada sua forma, deixando livre apenas algumas constantes capaz de alterar em poucos parâmetros sua forma. A partir de (6.d) podemos notar que as hipersuperfícies 3-dimensionais (espaciais) são sempre planas. No entanto o espaço-tempo não é plano na presença de um movimento não uniforme. Porém desde que $r_s \gg R$, todo o espaço-tempo será necessariamente plano com exceção da região de raio R , centrada no ponto $(x_s(t), 0, 0)$.

Trabalhando com a hipersuperfície 3-dimensional, podemos obter a informação da curvatura da superfície através do tensor de curvatura extrínseca K_{ij} . Esse tensor descreve

como hipersuperfícies tridimensionais são imersas em quatro dimensões no espaço-tempo, sendo definido como:

$$K_{ij} = \frac{1}{2\alpha} \left(D_i \beta_j + D_j \beta_i - \frac{\partial g_{ij}}{\partial t} \right). \quad (43.1)$$

Onde D_i corresponde a derivada covariante em relação a métrica espacial γ_{ij} . De acordo com as definições utilizadas na metodologia o tensor se reduz à:

$$K_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_i \beta_j + \partial_j \beta_i). \quad (43.2)$$

O tensor expansão pode ser definido em um referencial euleriano em função do tensor de curvatura extrínseca, como^[2]:

$$\theta = -\alpha \text{Tr}(K). \quad (44.1)$$

A única parte não nula do tensor será em relação às componentes x , assim ao desenvolvermos o tensor encontramos:

$$\theta = \frac{v_s(x - x_s) \frac{df}{dr_s}}{r_s}. \quad (44.2)$$

Onde $\frac{df}{dr_s}$ é a derivada da função (7.c) podendo ser representada explicitamente como:

$\frac{1}{2} \text{Coth}[R\sigma] (-\sigma \text{Sech}[\sigma(-R + r_s)]^2 + \sigma \text{Sech}[\sigma(R + r_s)]^2)$. A partir desse ponto iremos chamar a coordenada $(x-x_s)$ de x , sendo o mesmo que considerar $x_s=0$, isso será feito porque a subtração apenas se refere a distância em x em relação a um local onde será acionado o motor de dobra, como usaremos o referencial euleriano a velocidade será em função da sua posição no espaço e no tempo, mas como o espaço-tempo estará sendo “puxado e empurado” significa termos valores de velocidade diferente em um mesmo ponto como será mostrado a frente.

Assim podemos representar a métrica de acordo com o tensor expansão em coordenadas cilíndricas, sendo $\rho = (y^2 + z^2)^{1/2}$. A função de superfície imersa da métrica em termos de x e ρ , é dada por:

(45)

$$z(x, \rho) = \frac{xv_s \text{Coth}[R\sigma](-\sigma \text{Sech}[\sigma(-R + \sqrt{x^2 + \rho^2})]^2 + \sigma \text{Sech}[\sigma(R + \sqrt{x^2 + \rho^2})]^2)}{\sigma\sqrt{x^2 + \rho^2}}$$

O gráfico que representa a equação (45) para um caso específico é dado pela seguinte figura:

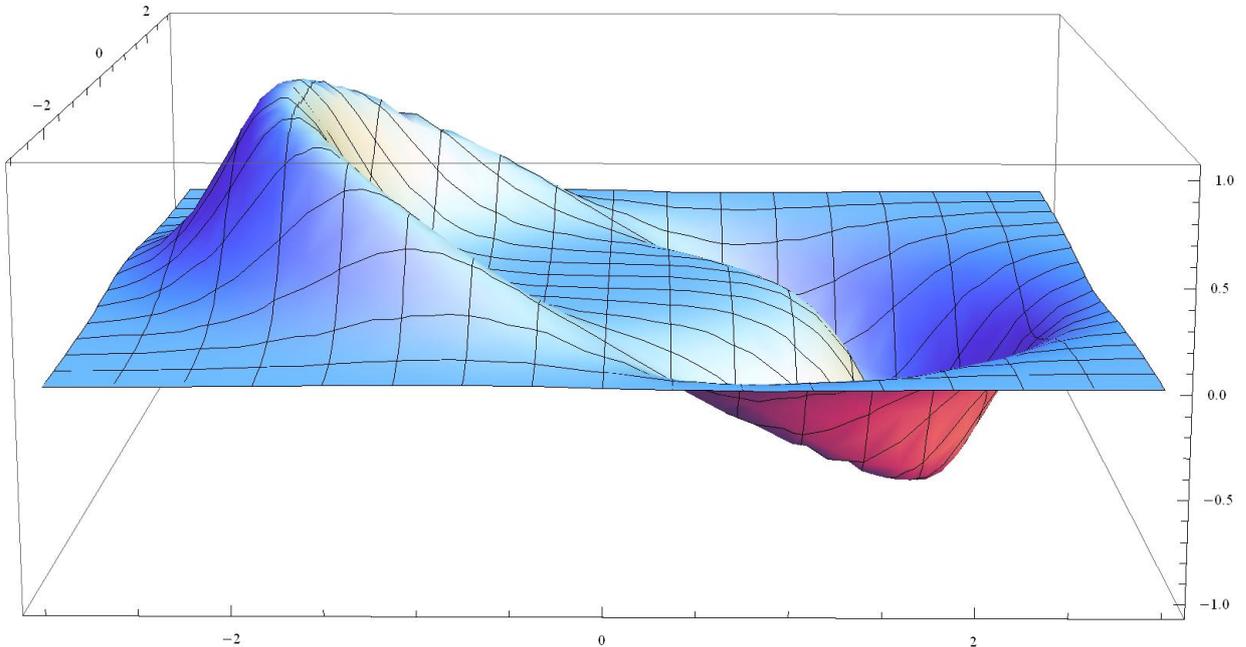


Figura 6. Representação do espaço do warp drive, de acordo com a equação (45), sendo $\sigma=2$, $R=2$ e $v_s=1$. Onde o centro da perturbação representa a posição da espaçonave $x_s=0$ como definido anteriormente. A frente da espaçonave se dá a contração do espaço enquanto atrás acontece a expansão.

4.6 Trajetória do Warp Drive

Diferente do wormhole que usa o referencial lagrangeano, o warp drive é mais fácil de ser estudado através de um referencial euleriano. Isso significa no caso clássico em trocar o nosso eixo de coordenadas em cada ponto e estudar o objeto a partir dali, porém no warp drive o espaço se move, logo conseguimos estudar a trajetória de um objeto com um referencial estático e euleriano. A curva da trajetória não é interessante pois a espaçonave em si não se espacialmente move quando acionado o motor de dobra, no entanto podemos

visualizar o que acontece com a espaço-tempo quando o motor de dobra é acionado. A seguinte figura mostra os passos do deslocamento usando o warp drive:

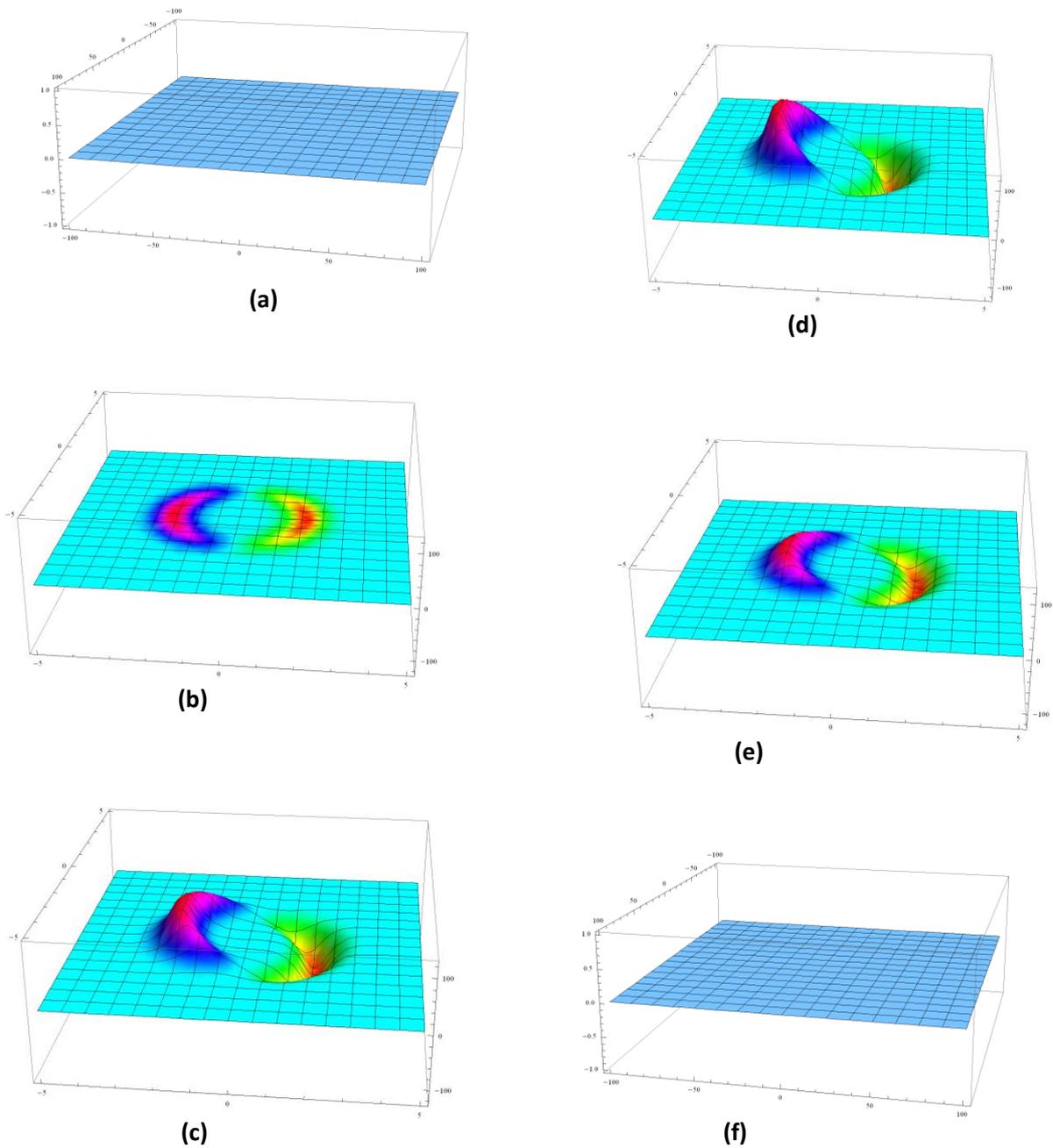


Figura7. Imagem explicativa do comportamento do espaço-tempo no deslocamento de algum objeto.

De acordo com a figura 6 podemos visualizar como seria uma viagem com o warp drive, como pode ser visto na métrica (8) a velocidade possui papel de destaque na curvatura. É facilmente observador que quando a velocidade é nula não há curvatura no espaço-tempo, resumindo a métrica a de Minkowski como mostrado em **(a)**. Assim que o motor de dobra é acionado e a espaçonave ganha aceleração começa a surgir a curvatura como mostrado em **(b)**. A medida com que a velocidade aumenta devido a aceleração a curvatura vai se tornando mais evidente como mostrado em **(c)**, até chegar a velocidade vista pelo observador **(d)**. A partir desse ponto a espaçonave inverte instantaneamente o sentido de sua aceleração, começando a desacelerar diminuindo a curvatura representado em **(e)**. Quando a velocidade se torna nula novamente a métrica volta a de Minkowski como no começo **(f)**. Assim a espaçonave não se deslocou no referencial observado, mesmo variando sua velocidade com o tempo, percorrendo uma grande distância como se estivesse em repouso para observador, causando o conhecido efeito de “surfear” no espaço-tempo para o observador fora da bolha.

4.7 Matéria exótica no Warp Drive

Assim como na métrica do wormhole, a métrica do warp drive viola as condições de energia conhecidas, violando todas (fraca, dominante e forte)^[8]. Podemos demonstrar como a métrica viola as condições de energia dominante e fraca calculando a densidade de energia vista por um observador euleriano de acordo com a sua quadrivelocidade, dada por:

$$n^\alpha = \frac{1}{\alpha} (1, \beta^i), \quad n_\alpha = -(\alpha, 0). \quad (46a,b)$$

Assim o observador irá ver a densidade de energia:

$$T^{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta = \alpha^2 T^{00} = \frac{1}{8\pi G} G^{00} c^4 = -\frac{1}{8\pi G} \frac{v_s^2 (z^2 + y^2)}{4r_s^2} \left(\frac{df}{dr_s}\right)^2 c^2. \quad (47)$$

De acordo com (47), um observador veria uma densidade de energia negativa em qualquer lugar, violando as condições de energia citadas.

4.8 Transporte com o Warp Drive

Diante dos itens mostrados anteriormente é possível fazer uma estimativa do tempo que seria gasto e da energia necessária em uma viagem por warp drive.

Para a hipotética viagem será considerado o mesmo destino da viagem usada pelo wormhole, a estrela Vega, partindo da Terra com uma distância total de 25 anos luz que será representada por 'D'. A viagem pelo warp drive é realizada da seguinte maneira: A nave com mecanismo de propulsão convencional se descola até uma região $d \ll D$, esse deslocamento deve ser feito para que a perturbação no espaço-tempo não afete a Terra. Nesse ponto 'd' será ativado o motor de dobra espacial, esse deslocamento 'd' representaria o x_s considerado zero na visualização anterior. Assim o motor de dobra espacial seria desligado a uma distância 'd' da estrela Vega para que a perturbação também não a afete. O motor de dobra funcionaria como explicado na seção 4.6.

De acordo com o que foi dito, temos que a expressão do tempo gasto de viagem medido pelo observador é dada por:

$$T = 2 \left[\frac{d}{v} + \sqrt{\frac{D-d}{a}} \right]. \quad (48.1)$$

Onde a é a aceleração da espaçonave e v a velocidade.

Considerando que tanto a Terra como Vega estejam em um espaço plano, o tempo medido pelo viajante é dado por:

$$\tau = 2 \left[\frac{d}{\gamma v} + \sqrt{\frac{D-d}{a}} \right]. \quad (48.2)$$

Onde $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$. Mesmo com os mecanismos de propulsão mais rápidos atualmente $\gamma \approx 1$.

Como a distância gasta para chegar até o ponto 'd' será insignificante perto da viagem toda, temos que a expressão do tempo de viagem é:

(48.3)

$$\tau \cong T \cong 2 \sqrt{\frac{D}{a}}.$$

A equação (48.3) é interessante, pois mostra que o tempo gasto em viagem não depende da forma do espaço mas sim da aceleração da espaçonave.

A aceleração da espaçonave no referencial local é sempre nula, é pode ser comprovada realizando a substituição $x=x_s(t)$ na equação (8). Assim podemos ter valores de aceleração arbitrariamente grandes sem causar nenhum mal estar nos viajantes da hipotética nave. Supondo que queremos fazer a viagem pelo warp drive com o mesmo tempo da feita pelo wormhole seria necessário uma aceleração de aproximadamente $1,39 \times 10^{17} \text{m/s}^2$.

A energia necessária para a viagem pode ser calculada através da integral em coordenadas cilíndricas da equação de densidade de energia (47), considerando a velocidade máxima que a espaçonave deve atingir seja igual à $1,39 \times 10^{17} \text{m/s}$, isso implicaria em ver uma velocidade mais rápida do que a luz, porém dentro da bolha a nave não ultrapassaria a velocidade c . Utilizando os valores das constantes iguais as citadas para o wormhole, sendo $\sigma=2$, $R=2$ e a integração em relação ao ângulo ϕ já realizada:

(49)

$$m = \int_0^{\infty} dx d\rho \frac{v_s^2 c^2 \rho^3 (-2 \text{Sech}[2(-2 + \sqrt{x^2 + \rho^2})]^2 + 2 \text{Sech}[2(2 + \sqrt{x^2 + \rho^2})]^2)^2}{(x^2 + \rho^2) 8G}.$$

Foi considerada que a distribuição de energia se estende por todo o espaço-tempo assim como no wormhole.

Diferente do wormhole a equação da massa necessária não pode ser expressa analiticamente, mas ao realizarmos a aproximação numérica encontramos que seu valor é de aproximadamente $-4,41 \times 10^{59} \text{kg}$, para realizar uma viagem até Vega pelo mesmo tempo do wormhole. Em caso contrário, se tivéssemos a mesma energia de construção do wormhole citado, o tempo seria enorme para realizar a viagem até Vega, a perturbação no espaço seria tão pequena que nem se quer veríamos uma velocidade superluminal do lado de fora da bolha, gastando milhões de anos para chegar ao destino. Assim é fácil ver que a integral em si e a função da forma, não influencia tanto no valor da massa, sendo definida praticamente pelas constantes cujo é multiplicada, principalmente a velocidade vista pelo observador de fora.

5. Conclusão

Com o trabalho é possível ver como funciona as duas formas de transporte, destacando a diferença de que, enquanto um wormhole funciona como um túnel pelo universo, o warp drive funciona como um motor que causa o efeito de se viajar com velocidade superluminal pelo universo para os observadores que estão em repouso. Comparar uma viagem pelo o warp drive e o wormhole só é interessante em questões de energia necessária de acordo com o trabalho, pois em relação ao tempo gasto ambas oferecem opções para que se possa viajar em um intervalo de tempo cada vez menor. No entanto considerando que se queira fazer uma viagem em um mesmo intervalo de tempo com ambas soluções, o warp drive consumirá muito mais energia do que o wormhole. Para a hipotética viagem até Vega, nas condições sugeridas, a diferença seria na ordem de 10^{30} kg de material exótico que o warp drive necessitaria a mais do que o wormhole. Assim, conclui-se que o wormhole, em relação à energia necessária, é superior ao warp drive como método de transporte.

6. Cronograma

01/08/2013 a 30/09/2013 Revisão da literatura de wormholes e estudo da métrica de Morris-Thorne.

01/10/2013 a 30/11/2013 Trajetórias na métrica de Morris-Thorne, aparência visual do wormhole.

01/12/2013 a 28/02/2014 Visualização computacional dos resultados obtidos. Elaboração do relatório parcial.

01/03/2014 a 31/03/2013 Estudo da métrica de Alcubierre para warp drive.

01/04/2013 a 31/05/2013 Visualização computacional do espaço-tempo.

01/06/2014 a 31/07/2014 Comparação entre as duas possibilidades estudadas para se viajar mais rápido do que a luz. Elaboração do relatório final.

7. Referências

- [1] M.S. MORRIS, K.S. THORNE e U. YURTSEVER, **Wormholes, Time Machines, and the Weak Energy Condition**, Phys. Rev. Lett. 61, 1446-1449 (1988).
- [2] M. Alcubierre, "**The warp drive: hyper-fast travel within general relativity**", Class. Quant. Grav. 11, L73-77 (1994). arXiv:gr-qc/0009013v1
- [3] WANG, Frank Y. **The images of a wormhole**. 16/05/2005 disponível em: arxiv.org/pdf/physics/0505108v1.pdf
- [4] HARTLE, James B. **Gravity: an introduction to Einstein's general relativity**. San Francisco, EUA: Addison Wesley, c2003. xxii, 582 p.
- [5] MULLER, Thomas. **Exact geometric optics in a Morris-Thorne wormhole spacetime**. Physical Review D 77, 044043 (2008).
- [6] WOLFRAMDEMONSTRATIONPROJECT, **Geodesics in the Morris-Thorne Wormhole Spacetime**. Disponível em: demonstrations.wolfram.com/GeodesicsInTheMorrisThorneWormholeSpacetime/. Acessado dia: 25/02/2014.
- [7] LOBO, Francisco, CRAWFORD, Paulo. "**Wormholes**": Túneis no Espaço-Tempo. Gazeta de Física. Disponível em: nautilus.fis.uc.pt/gazeta/revistas/22_3/004-010.300.pdf
- [8] VISSER, Matt, BACELÓ, Carlos. **Energy conditions and their cosmological implications**. Disponível em: arxiv.org/pdf/gr-qc/0001099v1.pdf