Lista 1 - Bases Matemáticas

Elementos de Lógica e Linguagem Matemática

1 — Dê exemplos ou contra-exemplos, se existirem, para as seguintes afirmações:

a) Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x + 1 > 2$.

b) Todas as letras da palavra "banana" são vogais.

c) Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x^2 < x$.

d) Para todos $m, n \in \mathbb{N}$ pares, temos que $n + m$ é par.

2 — O que as seguintes afirmações significam? Elas são universais ou particulares? Elas são verdadeiras? O universo de discurso em todos os casos é os números naturais.

a) $\forall x \exists y (x < y)$

b) $\exists y \forall x (x < y)$

c) $\exists x \forall y (x < y)$

d) $\forall y \exists x (x < y)$

e) $\exists x \exists y (x < y)$

f) $\forall x \forall y (x < y)$

3 — O que as seguintes afirmações significam? Elas são verdadeiras? Dê exemplos e contra-exemplos quando possível. O universo de discurso em todos os casos é os números naturais.

a) $\forall x \exists y (2x - y = 0)$

b) $\exists y \forall x (2x - y = 0)$

c) $\exists y \exists z (y + z = 100)$

4 — Negue as seguintes proposições:

a) $3 > 4$ e 2 é par.

b) Não é verdade que (3 é par ou que 5 é impar).

c) 2 é um número par e $3k + 1$ é um número ímpar.

d) 2 é número par e não é verdade que 3 é um número ímpar.

e) Todo elemento do conjunto A é elemento do conjunto B.

f) Não é verdade que (5 é um número primo e 4 é um número ímpar).

g) (Não é verdade que 5 é um número primo) ou 4 é um número ímpar.

5 — Nas seguintes proposições abertas o domínio de discurso é o conjunto dos reais. Para essas proposições esboce na reta real o seu conjunto verdade.

a) $x > 2$ e $x < 4$

b) $x > 2$ ou $x < 3$

c) $x > 2$ ou ($x < 5$ e $x > 3$)

d) não é verdade que ($x > 2$ e $x < 4$)

6 — Ache a contrapositiva, a recíproca e a inversa das seguintes frases:

a) $\text{não}\, p \Rightarrow q$.

b) $\text{não}\, p \Rightarrow \text{não}\, q$.

c) $p \Rightarrow \text{não}\, q$.

d) Se chove então eu não vou trabalhar.

e) Se x é par, então $2x + 1$ é ímpar.

f) Se minha mãe é um trator então eu sou uma moto-serra.

g) Se $2^k + 1$ é primo, então k é uma potência de 2.

h) Se $x^2 + y^2 = 0$ então x e y são iguais a 0.

7 — Atribua um valor verdade as seguintes proposições:

a) Se 2 é par, então 3 é ímpar.

b) Se 2 não é par, então 3 é ímpar.

c) Se 3 não é par, então 3 não é ímpar.

d) Se minha mãe é um trator então eu sou uma moto-serra.

8 — Para os pares de proposições p e q diga se p é condição necessária e\ou suficiente para q. Em todos os exemplos considere x um número natural.

a) p= "x é maior que 2" q ="x é maior que 3".

b) p="x é maior que 2" q ="x é maior igual a 2".

c) p="x é maior que 0 e x é menor que 2" q ="x é menor que 2".

d) p="x é maior que 0 e x é menor que 2" q ="$x = 1$".

e) p="Δ é um triângulo isósceles" q ="Δ é um triângulo equilátero".

f) p="M é uma matriz com determinante diferente de 0" q ="M é uma matriz invertível".

9 — Transcreva as seguintes proposições para a forma simbólica:

a) Existe um número real n tal que $n^2 = 2$.

b) Não existe número racional x tal que $x^2 = 2$.

c) Existe x tal que x^2 é par e divisível por 3.

d) Não existe número inteiro x tal que x^2 é primo ou x^2 é negativo.

e) Existe um úmero inteiro x tal que x^2 é par ou x^2 é ímpar.

f) Para cada número real x existe um número real y tal que $x + y = 0$.

g) Todo elemento do conjunto A é elemento do conjunto B.

h) Para todo ϵ, existe $\delta(\epsilon)$ tal que se $0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x) - f(l))| < \varepsilon$.

i) Todo número natural é divisível por 2, 3, 5 ou 7.

j) Para todo número racional x, x é menor que $1/x$.

k) Se a e b são dois números primos, então ab é primo.

l) Existem dois números cuja soma é 1000.

m) Não existe número racional cujo quadrado é 2.

n) Para todos números a e b reais, há um número c que é menor que b e maior que a.

10 — Para cada uma das proposições anteriores, escreva a negação simbólica e "em português".

11 — Reescreva cada afirmação a seguir em língua natural, sem usar notação simbólica.

a) $\forall n \in \mathbb{R},\ \ n < n^2$.

b) $\exists n \in \mathbb{R},\ \ n^2 = n$.

c) $\exists! n \in \mathbb{R},\ \ n^2 = n$.

d) $\exists n \in \mathbb{R},\ \ n^2 = n^3$.

e) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N} : k < n$.

f) $\forall a, b \in \mathbb{R},\ \ \exists c, d \in \mathbb{R} : a < c + d < b$.

g) $\forall a, b \in \mathbb{Z}, \exists c \in \mathbb{Z} : (a/b)c \in \mathbb{Z}$.

h) $\forall a, \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R} : \forall c \in \mathbb{R}, ab = c$

i) $\forall a, \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R} : ab = c$

12 — A fórmula de Bhaskara é uma proposição universal. Descreva-a simbolicamente.

13 — Para todas as afirmações a seguir n denota um número natural. Determine o conjunto verdade das seguintes proposições abertas:

a) $n^2 < 12$

b) $3n + 1 < 25$

c) $3n + 1 < 25 \text{ e } n + 1 > 4$

d) $n < 5$ ou $n > 3$

e) n é primo e não é verdade que $n > 17$

f) $(n - 2)(n - 3)(n - 4)(n - 5) = 0$

14 — Para cada demonstração, diga que tipo de técnica de prova foi usada, e explique como a técnica foi aplicada (o símbolo | significa "divide"):

a) $a|b$ *e* $a|c \to a|(b + c)$. Prova: se $a|b, \exists k_1 : ak_1 = b$; mas porque $a|c$, $\exists k_2 : ak_2 = c$. Assim, $b + c = ak_1 + ak_2 = a(k_1 + k_2)$, e mostramos que $\exists k : b + c = ak$. □

b) $\log_2 3$ *é irracional.* Prova: suponha que existem a e b tais que $\log_2 3 = a/b$ com $a, b \in \mathbb{Z}$. Então, $2^{a/b} = 3$, e $(2^{a/b})^n = 3^b$. Mas como $(2^{a/b})^b = 2$, teríamos que $2^a = 3^b$. Mas 2 elevado a qualquer inteiro deve ser par, e 3 elevado a qualquer inteiro deve ser ímpar. Como um número não pode ser par e ímpar ao mesmo tempo, temos que concluir que $\log_2 3$ é irracional. □

c) *Se* a *e* b *são reais e* ab *é irracional, então pelo menos um dentre* a *e* b *deve ser irracional.* Prova: se tanto a como b forem racionais, então há $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{Z}$ tais que $a = k_1/k_2$ e $b = k_3/k_4$. Então,

$ab = (k_1/k_2)(k_3/k_4) = \frac{(k_1 k_3)}{(k_2 k_4)}$ – o que significa que ab poderia ser escrito como quociente de dois inteiros. Portanto, se ab é irracional, ou a ou b deve ser irracional. □

d) *Se a é irracional, então $\sqrt{a}$ também é irracional.* Prova: Se $\sqrt{a}$ for racional, então existem inteiros m e n tais que $\sqrt{a} = m/n$. Elevando ambos os lados ao quadrado, temos $a = m^2/n^2$. Como m^2 e n^2 são inteiros, a é racional. □

e) *Para qualquer triângulo retângulo não degenerado (ou seja, com todos os lados de comprimento maior que zero), sejam a e b os comprimentos de seus catetos e c o comprimento de sua hipotenusa. Então,* $a+b > c$. Prova: Suponha qye $a+b \leq c$. Elevando ambos lados ao quadrado temos $(a+b)^2 \leq c^2$, ou ainda, $a^2 + 2ab + b^2 \leq c^2$. Como o triângulo não é degenerado (todos os lados sào maiores que zero), $a^2 + b^2 < a^2 + 2ab + b^2 \leq c^2$, e portanto $a^2 + b^2 < c^2$. No entanto, o Teorema de Pitágoras afirma que $a^2 + b^2 = c^2$, e a prova está completa. □

15 — As demonstrações a seguir estão incorretas. Aponte o erro em cada uma delas.

a) $1 < 0$. Prova: Seja um número real $x < 1$. Aplicando o logaritmo em ambos os lados da desigualdade, temos $\log x < \log 1$. Como sabemos que $\log 1 = 0$, então $\log x < 0$. Agora dividimos ambos os lados por $\log x$ e obtemos $1 < 0$.

b) *Todo número inteiro tem raiz quadrada inteira.* Prova: Provamos a contrapositiva de "$\forall n \in \mathbb{Z}, \sqrt{n} \in \mathbb{Z}$". Seja $a = \sqrt{n}$. Temos que $a^2 = n$, e como o quadrado de um inteiro é sempre outro inteiro, n também é inteiro.

c) *Se* $5|ab$ *então* $5|a$ *ou* $5|b$. Prova: Se $5|ab$ então ab é da forma $5k$ para algum k. Portanto, ou $a = 5m$ ou $b = m$ para algum m. Assim, concluímos que $5|a$ ou $5|b$.

d) $1 = 2$. Prova: Sejam a e b dois números iguais. Multiplicando ambos os lados de "$a = b'$" por a obtemos $a^2 = ab$. Subtraindo b^2 dos dois lados, $a^2 - b^2 = ab - b^2$. Fatorando, $(a+b)(a-b) = b(a-b)$. Subtraindo $(a-b)$ temos $a+b = b$. Quando a e b valem 1, temos que $1+1 = 1$, e está concluída a prova.

16 — Demonstre as seguintes afirmações:

a) Se a divide b e a divide c então a divide $b+c$.

b) Se p, q são números racionais, então $p+q$ é um número racional.

17 — Use o método de redução ao absurdo para provar cada uma das seguintes proposições.

a) A raiz cúbica de 2 é irracional.

b) Dados a, b, c inteiros. Mostre que se a não divide bc, então a não divide b.

18 — Prove cada uma das seguintes proposições pelo método contra-positivo.

a) Se x e y são dois números inteiros cujo produto é ímpar, então ambos têm de ser impar.

b) Se a e b são números reais tais que o produto ab é um número irracional, então ou a ou b deve ser um número irracional.

19 — Mostre que o produto de um número racional não nulo com um número irracional é irracional.

20 — Dados a, b, c números inteiros com $c \neq 0$. Mostre que a divide b se e somente se ac divide bc.

Exercícios Complementares

21 — Use o método de redução ao absurdo para provar cada uma das seguintes proposições.

a) Não há soluções inteiras positivas para a equação $x^2 - y^2 = 10$.

b) Não há solução racional para a equação $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1 = 0$.

1 a.) Exemplos: qualquer número real maior que 1. Contra-exemplos: qualquer número real menor igual a 1. **b.)** Exemplos: letra a. Contra-exemplos: letras b,n **e.)** Exemplos $m = 2$ e $n = 4$ ou $m = 6$ e $n = 8$. Contra-exemplos: não possui, pois como provaremos em ?? essa afirmação é verdadeira.

2 a.) Para todo número natural x existe um y tal que $x < y$. Ou seja, para qualquer número natural x existe um número natural y tal que y é maior que x. Verdadeira. Afirmação Universal. Exemplo $x = 1$ seja $y = 2$. **b.)** Existe um y tal que para todo x, x é menor que y. Afirmação particular. Afirmação falsa, pois para qualquer número natural y, $y + 1$ não é menor que y.

e.) Existem x e y tais que $x < y$. Afirmação particular. Verdadeira.

3 a.) Verdadeira. **b.)** Existe y tal que para todo x, $2x - y = 0$. Falsa, pois se $x = 0$ então $y = 0$, e se $x = 1$ então $y = 2$. **c.)** Verdadeira.

4 a.) $3 \leq 4$ ou 2 é impar. **e.)** Existe um elemento no conjunto A que não é elemento do B.

6 b.) Contrapositiva: $q \Rightarrow p$. Reciproca: $\text{não}\, q \Rightarrow \text{não}\, p$. Inversa: $p \Rightarrow q$. **d.)** Contrapositiva: “Se vou trabalhar então não chove”. Reciproca: “Se não vou trabalhar então chove”. Inversa: “Se não chove então vou trabalhar.

7 a.) *verdadeiro* **b.)** *verdadeiro* **c.)** *falso* **d.)** *verdadeiro*

8 a.) Condição necessária, mas não suficiente. **b.)** Condição suficiente, mas não necessária. **e.)** Condição necessária, mas não suficiente. **f.)** Condição necessária e suficiente.

9 a.) $\exists n \in \mathbb{R} \,|\, n^2 = 2$ **b.)** $\text{não}\, \exists x \in \mathbb{Q} \,|\, x^2 = 2$ **f.)** $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \,|\, x + y = 0$

10 a.) $\forall n \in \mathbb{R} n^2 \neq 2$. Para todo número real n, $n^2 \neq 2$. **b.)** $\exists x \in \mathbb{Q} \,|\, x^2 = 2$. Existe um número racional x tal que $x^2 = 2$. **f.)** $\exists x \in \mathbb{R} \,|\, \forall y \in \mathbb{R} \,|\, x + y = 0$. Existe um número real x tal que para todo número real y, $x + y = 0$.

11 a.) Todo número real é menor que seu quadrado. **b.)** Existe um único número real que é igual a seu próprio quadrado. **c.)** Para todo número real a existe algum outro real b tal que para qualquer c real, ab é igual a c.

12 A fórmula diz que as soluções para $ax^2 + bx + c = 0$ são dadas por $(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/(2a)$. Simbolicamente,

$$\forall a, b, c, x, (ax^2 + bx + c = 0) \\ \to \left(x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right. \\ \left. \text{ou } \; x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)$$

13 a.) $\{0, 1, 2, 3\}$ **c.)** $\{4, 5, 6, 7\}$ **e.)** $\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$

14 d.) A proposição provada é nao $R(a) \to$ nao $R(\sqrt{a})$; a prova apresentada é a da contrapositiva $R(\sqrt{a}) \to R(a)$. **e.)** Redução ao absurdo. A proposição diz que $a + b > c$, e a prova consiste em demonstrar que a negação da proposição, “$a + b \leq c$”, leva ao absurdo.

15 a.) A própria demonstração diz que $\log x < \log 1$, portanto $\log x < 0$. No entanto, ao multiplicar uma inequação $a < b$ por algum número negativo, tem-se que $-ak > -bk$. **b.)** A proposição provada não é a contrapositiva do que se queria provar, e sim a recíproca. **c.)** A proposição é “Se $5|ab$ então $5|a$ ou $5|b$”, e foi usada para provar a si mesma: “ab é da forma $5k \ldots$ Portanto ou $a = 5m$ ou $b = m$ para algum m”.