Lista 10 - Bases Matemáticas

Sequências II

1 — Para cada uma das seguintes sequências diga se ela é crescente, decrescente ou nenhuma dessas duas. Prove suas afirmações:

a) $a_n = n^2 + n$

b) $a_n = n^2 - 7n$

c) $a_n = \dfrac{2n-6}{3n+4}$

d) $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n+3}$

e) A sequência definida recursivamente por $a_1 = \sqrt{2}$ e $a_n = \sqrt{2a_{n-1}}$

2 — Para cada uma das seguintes sequências diga se ela é limitada superiormente e inferiormente. Prove suas afirmações:

a) $a_n = n^2 + n$

b) $a_n = n^2 - 7n$

c) $a_n = n^2 - \frac{n}{2}$

d) $a_n = \dfrac{1}{n^2}$

e) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n^3}$

f) A sequência definida recursivamente por $a_1 = \sqrt{2}$ e $a_n = \sqrt{2a_{n-1}}$

3 — Prove por indução que se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ então

$$\lim_{n\to\infty} (a_n)^k = a^k,$$

para todo $k \in \mathbb{N}^*$.

4 — Calcule os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} 4\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{n}\right) + 2\cos\left(\frac{1}{n}\right)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3 + 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{n}\right)}{7 + 2\cos\left(\frac{1}{n}\right)}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n+1}{n+1}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{2n^2}{3n^2+1}}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{8n^2+n+3}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{5 + \dfrac{2}{n}}$

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{9n^3}{4n^4+3n^3}$

h) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{9n^9+3n-2}{4n^9+4n^8}$

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\frac{9n^9+3n-2}{4n^9+4n^8}}$

j) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\mathrm{sen}(1/6n)}{\mathrm{sen}(1/4n)}$

k) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\tan(1/7n)}{\tan(1/3n)}$

l) $\lim\limits_{n\to\infty} n\tan(\frac{1}{n})$

m) $\lim\limits_{n\to\infty} n - \sqrt{n^2+2}$

n) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(3+\frac{1}{n}\right)^2 - 3^2}{\frac{1}{n}}$

o) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{4+\frac{1}{n}} - \sqrt{4}\right)n$

p) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{4-\frac{1}{n}} - \sqrt{4}\right)n$

5 — Mostre usando o teorema do confronto que se $a_n \to 0$ então:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{sen}(a_n) = 0$$

Conclua então que se $a_n \to 0$ então $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(a_n) = 1$.

6 — Mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos\left(n^3\right)}{n^5} = 0$

7 — Mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{\cos\left(n^2+2^n\right)}}{\sqrt{n}} = 0$

8 — Usando as formulas para $\cos(a+b)$ e $\mathrm{sen}(a+b)$ e o exercício 5, mostre que se $a_n \to 0$ então:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{sen}(x + a_n) = \mathrm{sen}(x)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(x + a_n) = \cos(x)$.

9 — Seja $h \in \mathbb{R} \neq 0$. Usando identidades trigonométricas mostre que:

a) $\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} = \frac{\sin(h/2)}{h/2} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)$

b) $\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} = -\frac{\sin(h/2)}{h/2} \sin\left(x + \frac{h}{2}\right)$

10 — Use a identidade do exercício anterior para mostrar que:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin(x + \frac{1}{n}) - \sin(x)}{\frac{1}{n}} = \cos(x)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos(x + \frac{1}{n}) - \cos(x)}{\frac{1}{n}} = -\operatorname{sen}(x)$

11 — Mostre que se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, então $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$

12 — Mostre que se $a_n > 0$, então $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \geq 0$

13 — Calcule os seguintes limites

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (2^n + n)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n}{\sqrt[3]{3n^3-3}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+3)^2(2n+3)^3(-n+2)}{(n+7)^4(n-8)}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n}{\sqrt[3]{3n^4-3}}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{3^n}$

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n^6 + 3n^3 + 2\right)$

h) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(-n^4 + n^3 + 2n + \sqrt{n}\right)$

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n^{3/2} - n^{1/2}\right)$

j) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n - \sqrt{2n^3+4}\right)$

k) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$

l) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n}{\sqrt[3]{3n^2-3}}$

m) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{3^n + 4n + \operatorname{sen}(1/n)}$

n) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3}{\cos(1/n) - 1}$

o) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{3n+2}$

p) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^5+3n}{3n^3+2}$

q) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{43n^7+3n}{273n^7+2}$

r) $\lim\limits_{n\to\infty} n + \frac{1}{n}$

s) $\lim\limits_{n\to\infty} \log_2(n^2)$

t) $\lim\limits_{n\to\infty} \tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}\right)$

u) $\lim\limits_{n\to\infty} \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}\right)$

v) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}}$

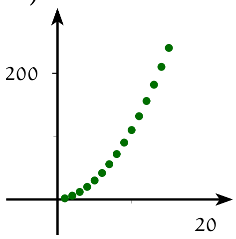
14 — Dados dois polinômios $p(n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_0$ e $q(n) = b_m n^m + b_{m-1} n^{m-1} + \cdots + b_0$. Calcule

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{q(n)}.$$

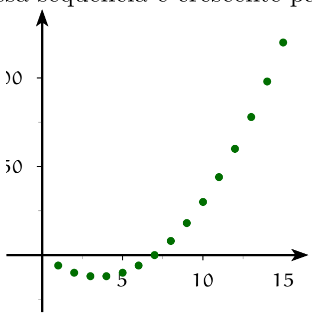
(Dica: Considere os casos $k < m, k > m, k = m$.)

Respostas dos Exercícios

1 **a.)**Crescente

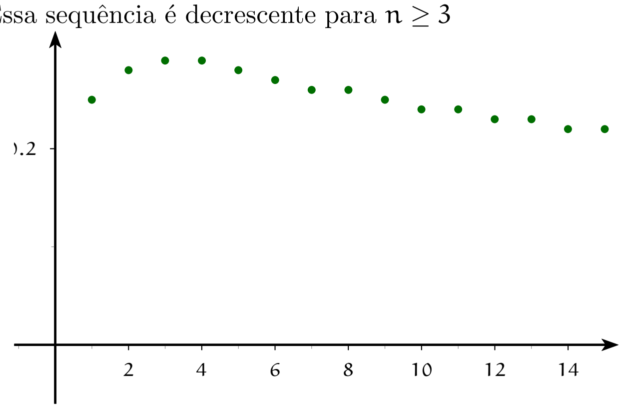


b.)A sequência não é crescente, nem decrescente. Essa sequência é crescente para $n \geq 4$



c.) Crescente

d.)A sequência não é crescente, nem decrescente. Essa sequência é decrescente para $n \geq 3$



e.) Crescente. Dica: Demonstre por Indução.

2 **a.)**Ilimitada. Dica: compare com a sequência $b_n = n$. **b.)**Ilimitada. Dica: Mostre que para n suficientemente grande $n^2 - 7n > n$. Conclua que se a_n fosse limitada a sequência $b_n = n$ seria limitada. **c.)**Ilimitada **d.)**Limitada. Dica: prove que $\left|\dfrac{1}{n^2}\right| < 2$ para todo n **e.)**Limitada. Dica: prove que $\left|\dfrac{(-1)^n}{n^3}\right| < 2$ para todo n **f.)**Limitada. Dica: prove por indução que $|a_n| < 2$

4 **a.)**2 **b.)**$1/3$ **c.)**3. Dica divida $3n+1$ por $n+1$ obtendo $3n+1 = 3(n+1) - 2$. Use esse fato para simplificar o limite. **d.)**$\sqrt{\frac{2}{3}}$. **e.)**0 **f.)**$\sqrt{5}$ **h.)**$\frac{9}{4}$ **j.)**$\frac{2}{3}$. Dica: limite fundamental. **k.)**$\frac{3}{7}$ **l.)**1. Dica: limite fundamental. **m.)**0. Dica: Multiplique e divida pelo conjugado. **n.)**6 **o.)**$\frac{1}{4}$ **p.)**$-\frac{1}{4}$

13 **a.)**∞ **b.)**1 **c.)**$\frac{2}{3^{1/3}}$ **d.)**$-\infty$ **e.)**0 **f.)**0 **g.)**∞ **h.)**$-\infty$ **j.)**$-\infty$ **k.)**∞ **l.)**∞ **m.)**0 **n.)**$-\infty$ **o.)**∞ **p.)**∞ **q.)**$\frac{43}{273}$ **r.)**∞ **s.)**∞ **t.)**$-\infty$ **u.)**∞