

Lista 3 - Bases Matemáticas

Indução

1 — Calcule :

- a) a soma dos n primeiros números pares.
- b) a soma dos n primeiros números ímpares.

2 — Prove que para todo inteiro positivo n vale:

$$= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}.$$

3 — Porque a seguinte demonstração está incorreta:

Teorema Todas as pessoas têm a mesma cor dos olhos.

Demonstração Faremos a demonstração por indução: para isso demonstraremos a afirmação "Todos os membros de qualquer conjunto de pessoas têm a mesma cor dos olhos".

Esta afirmação é claramente verdadeiro para qualquer conjunto com apenas uma pessoa.

Agora, suponha que temos um conjunto S de pessoas, e que a hipótese indutiva é verdadeiro para todos os conjuntos com um número menor de elementos. Seja então S_1 o conjunto formado removendo uma pessoa de S , e S_2 ser o conjunto formado pela remoção de outra pessoa de S .

Por hipótese indutiva todos os membros da S_1 tem a mesma cor dos olhos, o que também é verdadeiro para S_2 . Como $S_1 \cap S_2$ tem elementos de ambos os conjuntos, logo todos os elementos de S possuem a mesma cor dos olhos.



4 — Demonstre que para todo inteiro positivo n vale:

- a) $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (\frac{1}{2}n(n+1))^2$.
- b) $1 + 2(\frac{1}{2}) + 3(\frac{1}{2})^2 + \dots + n(\frac{1}{2})^{n-1} = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}$.
- c) $(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3}) \dots (1 - \frac{1}{n+1}) = \frac{1}{n+1}$.
- d) $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$.
- e) $n < 2^n$.
- f) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n+1}n^2 = (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2}$.

5 — Dados a e r dois números inteiros, $r \neq 1$. A sequência $a_1 = a, a_2 = ra, a_3 = r^2a, \dots, a_n = r^{n-1}a, \dots$ é denominada **progressão geométrica de razão r** . Prove que a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica é:

$$S_n = \frac{r^n a - a}{r - 1}.$$

6 — Prove que $2n + 1 < 2^n$ para todo $n > 3$.

7 — Seja x um inteiro positivo. Demonstre que:

$$(1 + x)^n > 1 + nx, \text{ para todo } n \geq 2.$$

8 — Prove que

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

9 — Prove que para qualquer inteiro positivo n o número $2^{2n} - 1$ é divisível por 3.

10 — Prove que um caixa eletrônico pode entregar ao usuário qualquer valor maior ou igual a R\$4 usando apenas notas de dois e de cinco reais.

* 11 — Mostre que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo com n lados ($n \geq 3$) é $(n - 2)\pi$.

Exercícios Complementares

12 — Prove que

a) $\sum_{k=1}^n 2^k = 2^{n+1} - 2$

b) $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$\text{c) } \sum_{i=1}^n \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

$$\text{d) } \sum_{j=1}^n j(j+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$\text{e) } \sum_{j=1}^n (2j-1) = n^2$$

$$\text{f) } \sum_{i=1}^n i(i!) = (n+1)! - 1$$

13 — Use indução para mostrar que um con-

junto finito com n elementos possui 2^n subconjuntos.

* **14** — Prove que para todo $n \geq 9$,

$$n! \geq (2n)^2$$

.

* **15** — Prove para todo $n \geq 1$,

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{n}$$

Respostas dos Exercícios

1 b.) Começemos com verificar a condição PIF 1.

$$P(1) = "1 = 1^2"$$

Logo, $P(1)$ é verdadeira. Para verificar a condição PIF 2, devemos tomar um número natural positivo qualquer $k \in \mathbb{N}$ e mostrar que vale a implicação $P(k) \Rightarrow P(k+1)$. Em outras palavras, devemos supor que $P(k)$ é verdadeira (hipótese indutiva) e mostrar que $P(k+1)$ é verdadeira. Logo, a nossa hipótese indutiva é

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1) = k^2$$

Reescrevendo $P(k+1)$ e usando a hipótese indutiva temos :

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1) + (2(k+1)-1) \\ = k^2 + 2k + 1 \\ = (k+1)^2 \end{aligned}$$

Assim, verificamos que, se $P(k)$ é verdadeira, também o é $P(k+1)$. Donde, pelo PIF, concluímos que $P(n)$ é verdadeira para todo natural $n \geq 1$, i.e. para todo natural positivo.

2 Começemos com verificar a condição PIF 1.

$$P(1) = "1 + 2 = 2^{1+1} - 1" \quad (1)$$

$$P(1) = "3 = 3" \quad \text{verdadeira} \quad (2)$$

Logo, $P(1)$ é verdadeira. Para verificar a condição PIF 2, devemos tomar um número natural positivo qualquer $k \in \mathbb{N}$ e mostrar que vale a implicação $P(k) \Rightarrow P(k+1)$. Em outras palavras, devemos supor que $P(k)$ é verdadeira (hipótese indutiva) e mostrar que $P(k+1)$ é verdadeira. Logo, a nossa hipótese indutiva é

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$$

Reescrevendo $P(k+1)$ e usando a hipótese indutiva:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^k + 2^{k+1} &= 2^{k+1} - 1 + 2^{k+1} \\ &= 2(2^{k+1}) - 1 \\ &= (2^{k+2}) - 1 \end{aligned}$$

Assim, verificamos que, se $P(k)$ é verdadeira, também o é $P(k+1)$. Donde, pelo PIF, concluímos que $P(n)$ é verdadeira para todo natural $n \geq 1$, i.e. para todo natural positivo.

4 d.) Começemos com verificar a condição PIF 1.

$$P(1) = "1 + 2 = 2^{1+1} - 1"$$

$$P(1) = "3 = 3" \quad \text{verdadeira}$$

Logo, $P(1)$ é verdadeira. Para verificar a condição PIF 2, devemos tomar um número natural positivo qualquer $k \in \mathbb{N}$ e mostrar que vale a implicação $P(k) \Rightarrow P(k+1)$. Em outras palavras, devemos supor que $P(k)$ é verdadeira (hipótese indutiva) e mostrar que $P(k+1)$ é verdadeira. Logo, a nossa hipótese indutiva é

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$$

Usando a hipótese de indução, queremos demonstrar $P(k+1)$, reescrevendo $P(k+1)$ e usando a hipótese indutiva temos:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^k + 2^k + 1 &= 2^{k+1} - 1 + 2^{k+1} \\ &= 2(2^{k+1}) - 1 \\ &= (2^{k+2}) - 1 \end{aligned}$$

7 Começemos com verificar a condição PIF 1.

$$P(2) = "(1+x)^2 > 1 + 2x"$$

$$P(2) = "1 + 2x + x^2 > 1 + 2x"$$

como $x > 0$, $P(2)$ é verdadeira

Logo, $P(2)$ é verdadeira. Para verificar a condição PIF 2, devemos tomar um número natural positivo qualquer $k \in \mathbb{N}$ e mostrar que vale a implicação $P(k) \Rightarrow P(k+1)$. Em outras palavras, devemos supor que $P(k)$ é verdadeira (hipótese indutiva) e mostrar que $P(k+1)$ é verdadeira. Logo, a nossa hipótese indutiva é

$$(1+x)^k > 1 + kx$$

Usando a hipótese de indução, queremos demonstrar $P(k+1)$, reescrevendo $P(k+1)$ e usando a hipótese indutiva temos:

$$\begin{aligned} (1+x)^{k+1} &= (1+x)((1+x)^k) \\ &\geq (1+x)(1+kx) \\ &\geq 1 + kx + x + kx^2 \\ &\geq 1 + (k+1)x \end{aligned}$$

8 Começemos com verificar a condição PIF 1.

$$P(1) = " \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{1 \cdot 2} " \quad \text{logo } P(1) \text{ é verdadeira}$$

Logo, $P(1)$ é verdadeira. Para verificar a condição PIF 2, devemos tomar um número natural positivo qualquer $k \in \mathbb{N}$ e mostrar que vale a implicação $P(k) \Rightarrow P(k+1)$. Em outras palavras, devemos supor que $P(k)$ é verdadeira (hipótese

indutiva) e mostrar que $P(k+1)$ é verdadeira. Logo, a nossa hipótese indutiva é

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$$

Usando a hipótese de indução, queremos demonstrar $P(k+1)$, reescrevendo $P(k+1)$ e usando a hipótese indutiva temos:

$$\underbrace{\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)}}_{\text{Por hipótese de indução} = k/(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} =$$

$$= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

9 Queremos demonstrar que para todo $n \in \mathbb{Z}_+^*$ existe $m \in \mathbb{Z}^*$ tal que

$$2^{2n} - 1 = 3m$$

Começemos com verificar a condição PIF 1.

$$P(1) = 2^{2 \cdot 1} - 1 = 3 \cdot 1$$

Vamos assumir que $P(k)$ é verdadeira, i.e., existe $m \in \mathbb{Z}^*$ tal que

$$2^{2k} - 1 = 3m$$

ou seja, vamos assumir que

$$2^{2k} = 3m + 1$$

Agora vamos demonstrar a implicação $P(k) \Rightarrow P(k+1)$. Reescrevendo $P(k+1)$ e usando a hipótese indutiva temos:

$$2^2(k+1) - 1 = 2^{2k+2} - 1 \quad (3)$$

$$= 4 \cdot 22k - 1 \quad (4)$$

$$= 4 \cdot (3m + 1) - 1 \quad (5)$$

$$= 12m + 4 - 1 \quad (6)$$

$$= 3(4m + 1) \quad (7)$$

$$(8)$$

E logo $2^2(k+1) - 1$ é divisível por 3.