

# Lista 4

## Bases Matemáticas

### Números Reais

**1** — Considere os seguintes conjuntos. Diga quais são limitados superiormente e quais são limitados inferiormente. E se existir encontre o supremo e o ínfimo desses conjuntos:

- a)  $A = \{1, 2, 4, 8, \dots\}$
- b)  $B = \{1 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$
- c)  $C = \{1 - n! : n \in \mathbb{N}\}$
- d)  $D = \{x \in \mathbb{Q} : 1 \leq x\}$
- e)  $E = \{x \in \mathbb{Q} : 1 \leq x < 2\}$
- f)  $F = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 3\}$
- g)  $G = \{\frac{n}{1+n} : n \in \mathbb{N}\}$
- h)  $H = \{\frac{n+2}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$
- i)  $I = \{\frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$
- j)  $J = \{2^n : n \in \mathbb{N}\}$

**2** — A partir dos axiomas A1, ..., A9 dos números reais prove as seguintes propriedades:

- a) O número 0 (zero) é o único elemento neutro da soma.
- b) O número 1 é o único elemento neutro da multiplicação.
- c) Dado qualquer  $a \in \mathbb{R}$ , resulta  $a \cdot 0 = 0$
- d) Para quaisquer números reais  $a$  e  $b$ , tem-se que:

$$ab = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0.$$

**3** — Mostre, utilizando propriedades básicas, que:

- a) Se  $ax = a$  para algum  $a \neq 0$  então  $x=1$ .
- b)  $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ .
- c) Se  $x^2 = y^2$ , então  $x = y$  ou  $x = -y$ .
- d)  $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$
- e)  $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$
- f) Se  $a \leq b$  e  $c \leq d$  então  $a + c \leq b + d$ .
- g) Se  $a \leq b$  então  $-b \leq -a$ .
- h) Se  $a \leq b$  e  $c \leq d$  então  $a + c \leq b + d$ .

## Respostas dos Exercícios

- 1** a.) Limitado inferiormente, mas não superiormente  $\inf A = 1$ .  
b.) Limitado inferiormente e superiormente  $\sup B = 2$   $\inf B = 1$   
d.) Limitado inferiormente, mas não superiormente  $\inf A = 1$ .  
f.) Limitado inferiormente e superiormente  $\inf F = -\sqrt{3}$  e  $\sup F = \sqrt{3}$ .  
g.) Limitado inferiormente e superiormente.

- 2** a.) Suponha que não fosse, i.e, existem  $0$  e  $0'$  distintos tais que:

$$a + 0 = a \quad \forall a$$

$$a + 0' = a \quad \forall a$$

Considere então  $0 + 0'$

Como  $0 = 0 + 0' = 0'$

Temos um absurdo.

- 3** a.) Por hipótese  $ax = a$  e como  $a \neq 0$  existe  $a^{-1}$

Logo  $a^{-1}(ax) = x$  por um lado

e por outro

$a^{-1}(ax) = a^{-1}(a) = 1$  por outro.

Logo  $x = 1$

- b.) Calculando  $(x - y)(x + y)$  usando a distributiva temos:

$$(x - y)(x + y) = x(x + y) - y(x + y) = x^2 + xy - yx - y^2 = x^2 - y^2$$

c.) Se  $x^2 = y^2$  temos que  $x^2 - y^2 = 0$  o que implica  $(x + y)(x - y) = 0$  o que implica  $x = y$  ou  $x = -y$

f.) Como  $a \leq b$  temos por A11 que  $a + c \leq b + c$

Por outro lado como  $c \leq d$  temos por A11 que  $b + c \leq b + d$  logo por transitividade temos:

$$a + c \leq b + d$$

- h.) Como  $c \geq d$ , pelo item b temos  $-c \leq -d$  e logo pelo item a temos:  $a - c \leq b - d$ .