

Lista 5

Bases Matemáticas

Um pouco de Álgebra

1 — Expanda:

- a) $(3a + 2b)^2$
- b) $(3a + 2b)^3$
- c) $(3a - 2b)^3$
- d) $(x^2 - 1)(x^2 + 1)$
- e) $[(x - y) + 1][(x - y) - 1]$
- f) $(a + b + c)^2$

2 — Se $a + \frac{1}{a} = b$ determine $a^2 + \frac{1}{a^2}$ em função de b

3 — Fatore

- a) $a^2x + b^2y + a^2y + b^2x$
- b) $2x^2 - x + 4xy - 2y$
- c) $4y^2 - 16$
- d) $(x + b)^2 - a^2$
- e) $x^2 - a^2 - 2ab - b^2$
- f) $x^3 + \frac{1}{x^3}$
- g) $x^6 + 1$
- h) $x^2 - 6x + 9 - y^2$

4 — Escreva cada expressão usando apenas um radical e simplifique:

- a) $\sqrt{\sqrt{x}}$
- b) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}$
- c) $\sqrt{\sqrt[3]{5x^2}}$
- d) $\sqrt{x}\sqrt[3]{x}$

- e) $\frac{\sqrt[5]{xy}}{\sqrt[3]{xy}}$
- f) $\frac{\sqrt[5]{xy}}{\sqrt[3]{y}\sqrt{y}}$
- g) $\sqrt[5]{81x^2y^6\sqrt{27a^2b^{-1}}}$

5 — Simplifique as expressões:

- a) $\frac{a^{3/5}a^{2/7}}{a^{1/3}}$
- b) $\frac{a^{2/5}b^{3/4}(3a)^2}{b^{3/5}a^{1/3}}$
- c) $\frac{(x^9y^6)^{-1/3}}{(x^6y^4)^{-1/2}}$
- d) $\frac{(a^2b^4)^{1/2}}{(81a^6b^9)^{1/3}}$

6 — Simplifique as expressões:

- a) $\frac{\frac{4x^3y^2}{(x-2)^4}}{\frac{6x^2y}{(x-2)^{3/2}}}$
- b) $\frac{\frac{x^2-y^2}{3x^2y^5}}{\frac{y+x}{x+y}}$
- c) $\frac{\frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2}}{h}$
- d) $\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{\frac{b}{a} - \frac{a}{b}}$
- e) $\frac{(z+w)^{-1}}{(z-w)^{-1}}$
- f) $(p^{-1} + q^{-1})^{-1}$

7 — Realize as seguintes divisões de polinômios:

- a) $5x^2 + 4x + 2 \div 6x + 2$
- b) $x^2 + x - 2 \div x - 1$
- c) $x^2 - a^2 \div x - a$
- d) $x^4 - 256 \div x - 4$
- e) $x^4 - a^4 \div x - a$
- f) $x^5 + x^3 - 2 \div x - 1$
- g) $4x^3 + 2x + 1 \div x + 1$
- h) $x^3 \div x - a$

8 — Escrever o seguinte sem utilizar sinais do valor absoluto, separando em casos quando seja necessário.

- a) $||x| - 1|$
- b) $a - |a - |a||$

9 — Mostre que $|a| = |-a|$

10 — Mostre que $|a| \leq b$ se e somente se $-b \leq a \leq b$.

11 — Encontrar todos os números x tais que

- a) $|x - 3| = 8$
- b) $|x - 1| \cdot |x + 1| = 0$
- c) $|x - 1| \cdot |x + 2| = 3$

12 — Mostre que:

- a) $|xy| = |x||y|$
- b) $|x| < a$ se e somente se $-a < x < a$
- c) $\left| \frac{1}{x} \right| = \frac{1}{|x|}$, se $x \neq 0$.
- d) $|x + y| \leq |x| + |y|$
- e) $|x - y| \leq |x + y|$
- f) $|x| - |y| \leq |x - y|$

g) $||x| - |y|| \leq |x - y|$

h) $|x + y + z| \leq |x| + |y| + |z|$.

13 — Mostre que:

- a) $(x + y)^2 = x^2 + y^2$ se e somente se $x = 0$ ou $y = 0$
- b) $(x + y)^3 = x^3 + y^3$ se e somente se $x = 0$ ou $y = 0$ ou $x = -y$

14 — Resolva as seguintes igualdades:

- a) $\frac{x}{x-2} + \frac{4}{x-1} = 5$
- b) $\frac{2}{x^2-1} - \frac{x}{x-1} = 1$
- c) $|x| = -x + 2$
- d) $|-x + 2| = 2x + 1$
- e) $|x + 1| + |x - 2| = 1$
- f) $|5x - x^2 - 6| = x^2 - 5x + 6$
- g) $|x - 1| - 2|x - 2| + 3|x - 3| = 4$
- h) $|x^2 - 2| + 2x + 1 \geq 0$
- i) $\frac{9}{|x-5|-3} \geq |x-2|$
- j) $\sqrt{x+1} = 8 - \sqrt{3x+1}$
- k) $1 + \sqrt{3x+5} = x$
- l) $\sqrt{4x-3} + \sqrt{5x-1} = \sqrt{15x+4}$
- m) $\sqrt[3]{x+34} - \sqrt[3]{x-3} = 1$

15 — Encontrar todos os números x tais que:

- a) $4 - x < 3 - 2x$
- b) $5 - x^2 < 8$
- c) $5 - x^2 < -2$
- d) $(x - 1)(x - 3) > 0$
- e) $x^2 - 2x + 2 > 0$
- f) $x^2 - x + 10 > 16$
- g) $\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} > 0$

- h) $\frac{x-1}{x+1} > 0$
- i) $|x-3| < 8$
- j) $|x+4| < 2$
- k) $|x-1| + |x-2| > 1$
- l) $|x-1| + |x+1| < 2$
- m) $|x-1| + |x+1| < 1$

16 — Mostre que

- a) Se $|x-3| < \frac{5}{1000}$ e $|y-1| < \frac{5}{1000}$, então $|(x+y)-4| < \frac{1}{100}$ e $|(x-y)-2| < \frac{1}{100}$.
- b) Se $|x-x_0| < \frac{\epsilon}{2}$ e $|y-y_0| < \frac{\epsilon}{2}$, então $|(x+y)-(x_0+y_0)| < \epsilon$ e $|(x-y)-(x_0-y_0)| < \epsilon$.

17 — Resolva as seguintes desigualdades:

- a) $|x-2| - |x+2| > 2$
- b) $|x-2| - x|x+2| < 1$
- c) $\frac{1}{2-x} + \frac{5}{2+x} < 1$
- d) $\frac{2x-5}{x^2-6x-7} < \frac{1}{x-3}$
- e) $(x+1)(3-x)(x-2)^2 \geq 0$
- f) $\frac{2-x^2}{1-x} < x$
- g) $\sqrt{1-3x} - \sqrt{5+x} > 1$
- h) $\sqrt{4-\sqrt{1-x}} - \sqrt{2-x} > 0$

Respostas dos Exercícios

1 a.) $9a^2 + 12ab + 4b^2$ b.) $27a^3 + 54a^2b + 36ab^2 + 8b^3$ c.) $27a^3 - 54a^2b + 36ab^2 - 8b^3$ d.) $-1 + x^4$ e.) $-1 + x^2 - 2xy + y^2$ f.) $a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$

2 $a^2 + \frac{1}{a^2} = b^2 - 2$

3 a.) $(a^2 + b^2)(x + y)$ b.) $(-1 + 2x)(x + 2y)$ c.) $4(-2 + y)(2 + y)$ d.) $-(a - b - x)(a + b + x)$ e.) $-(a + b - x)(a + b + x)$ f.) $(1/x^3 + x)(1/x^6 - 1/x^2 + x^2)$ ou $((1 + x^2)(1 - x^2 + x^4))/x^3$ g.) $(-3 + x - y)(-3 + x + y)$

5 a.) $a^{58/105}$ b.) $9a^{31/15}b^{3/20}$ d.) $1/(33^{1/3}ab)$

6 a.) $(2xy)/(3(-2+x)^{5/2})$ c.) $-((h+2x)/(x^2(h+x)^2))$

11 a.) $\{-5, 11\}$

$\{-1, 1\}$ c.) $\{(-1)^{(1/3)}, (-1)^{(2/3)}, 1/2(-1 - \sqrt{21}), 1/2(-1 + \sqrt{21})\}$

12 a.) Temos quatro casos a considerar.

- i) Se $x \geq 0, y \geq 0$, temos $|xy| = xy = |x||y|$
- ii) Se $x \geq 0, y < 0$, temos $|xy| = -xy = |x||y|$
- iii) Se $x < 0, y \geq 0$, temos $|xy| = -xy = |x||y|$
- iv) Se $x < 0, y < 0$, temos $|xy| = xy = |x||y|$

c.) $-|a| \leq a \leq |a|$ e $-|b| \leq b \leq |b|$

Somando as desigualdades temos: $-|a| - |b| \leq a + b \leq |a| + |b|$ e logo $-(|a| + |b|) \leq a + b \leq$

$|a| + |b|$ De onde podemos concluir que: $|a + b| \leq |a| + |b|$

f.)

Usando a desigualdade triangular, temos que:

$$|a| = |b + (a - b)| \leq |b| + |a - b| \Rightarrow |a| - |b| \leq |a - b|$$

e

$$|b| = |a + (b - a)| \leq |a| + |b - a| = |a| + |a - b|$$

$$\Rightarrow -|a - b| \leq |a| - |b|.$$

logo: $-|a - b| \leq |a| - |b|$ e $|a| - |b| \leq |a - b|$. Segue-se então, por

que

$$||a| - |b|| \leq |a - b|.$$

14 a.) $\{3/2, 3\}$ b.) $-3/2$ c.) 1 d.) $1/3$ e.) $\{\}$ f.) $x \leq 2$ ou $x \geq 3$ h.) $x \leq -1 - \sqrt{2}$ ou $x \geq -1$ j.) 8 k.) $1/2(5 + \sqrt{41})$ l.) $1/22(43 + 3\sqrt{269})$ m.) 30

15 a.) $x < -1$ b.) $\mathbb{R}$ c.) $x < -\sqrt{7}$ ou $x > \sqrt{7}$ d.) $x < 1$ ou $x > 3$ e.) $\mathbb{R}$ f.) $x < -2$ ou $x > 3$ g.) $0 < x < 1$ h.) $x < -1$ ou $x > 1$ i.) $-5 < x < 11$ k.) $\{x < 1 \text{ ou } x > 2\}$ m.) $\{\}$

16 Dica: Desigualdade Triangular e as propriedades de módulo do exercício 12

17 a.) $x < -1$ b.) $x > \frac{1}{2}(-3 + \sqrt{13})$ c.) $x < -2$ ou $x > 2$ d.) $x < -1$ ou $3 < x < 7$ e.) $-1 \leq x \leq 3$ f.) $1 < x < 2$