

Lista 7

Bases Matemáticas

Funções II

1 — Dadas as funções $f(x) = \sin x$ e $g(x) = \pi \llbracket x \rrbracket$, determine os domínios e as imagens das funções compostas $f \circ g$ e $g \circ f$.

2 — Denotando por ι a função identidade, mostre que para toda função f vale que:

- $\iota \circ f = f$ e $f \circ \iota = f$
- Se f é inversível, então $f \circ f^{-1} = \iota$ e $f^{-1} \circ f = \iota$

Em tempo, isso significa que a função identidade cumpre o papel de *elemento neutro* da operação de composição de funções.

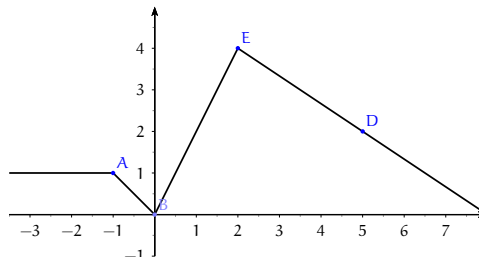
3 — Para as funções abaixo encontre $f(x+2)$, $f(-x)$, $f(x+h)$ e $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, sendo $h \neq 0$:

- x
- $3x+4$
- x^2
- $5x^2+1$
- x^2-x
- x^3+x^2

4 —

- Como o gráfico de $f(|x|)$ está relacionado como o gráfico de $f(x)$?
- Esboce o gráfico de $|x|^3$.
- Esboce o gráfico de $-|x|^5$.
- Esboce o gráfico de $\sin(|x|)$
- Esboce o gráfico de $\cos(|x|)$

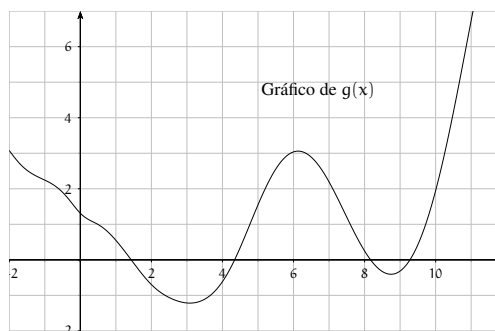
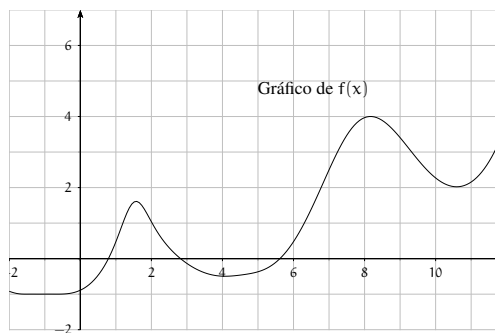
5 — Encontre uma expressão para a função cujo gráfico é a curva abaixo:



6 — Para cada par de funções $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: B \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ abaixo, determine os domínios máximo de definição de $f(x)$, $g(x)$, $(f+g)(x)$, $f(x)g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$, $(f \circ g)(x)$ e $(g \circ f)(x)$ e finalmente as expressões para $(f \circ g)(x)$ e $(g \circ f)(x)$:

- $f(x) = \sqrt{x+2}$ e $g(x) = |x|$
- $f(x) = \frac{1}{x(x-2)}$ e $g(x) = x^2$
- $f(x) = \frac{1}{x(x-2)}$ e $g(x) = \sqrt{x}$
- $f(x) = \sqrt[5]{x^3}$ e $g(x) = 2^{-x}$

7 — Sejam $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções cujos gráficos estão apresentados a seguir



A partir desses gráficos, esboce o gráfico das seguintes funções:

- a) $2f(x)$
- b) $2g(x)$
- c) $-f(x)$
- d) $-g(x)$
- e) $f(-x)$
- f) $g(-x)$
- g) $f(|x|)$
- h) $g(|x|)$
- i) $f(-|x|)$
- j) $\frac{1}{2}g(x) + 1$
- k) $-\frac{1}{2}g(x) + 1$
- l) $-\frac{1}{2}|g(x)| + 1$
- m) $f(\frac{1}{2}x)$
- n) $||f(x)| - 1|$
- o) $(f + g)(x)$
- p) $(f - g)(x)$
- q) $(f + g)(|x|)$

8 — Esboce o gráfico das seguintes funções, utilizando o gráfico de uma função mais simples e aplicando as transformações apropriadas. Para cada uma dessas funções indique as intersecções com os eixos x e y , as regiões nas quais as funções são positivas, negativas, crescentes, decrescentes e os pontos de máximo e mínimo local se existirem.

- a) $|2x| + 1$
- b) $(x + 3)^4$
- c) $(x + 3)^4 - 1$
- d) $|(x + 3)^4 - 1|$
- e) $|(x + 3)^4 - 1| - 1$
- f) $|x - 1| + 1$
- g) $\cos|x - 1|$
- h) $|2x^2 - 1|$
- i) $|2x^2 - 1| - 1$
- j) $||2x^2 - 1| - 1| - 2$
- k) $|(x - 4)^6 - 2|$
- l) $\text{sen}(2x) + 3$
- m) $-2|\text{sen}(2x) + 3| + 1$
- n) $\sqrt{|x + 2|}$
- o) $2\cos(3x + \pi)$
- p) $1 + \cos(|x - 1|)$
- q) $2^{(x-\pi)}$
- r) $2^{(x-\pi)} - 5$
- s) $5^{|x|}$
- t) $5^{|x+2|}$

- u) $|3^x - 5|$
- v) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x < 0 \\ \frac{x}{2} + 1, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$
- w) $f(x) = \begin{cases} \cos(2x), & \text{se } x < 1 \\ 2\cos(x - 1), & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$
- x) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x, & \text{se } |x^2 - 1| + 1 < 0 \\ \cos(3x), & \text{se } |x^2 - 1| + 1 \geq 0 \end{cases}$

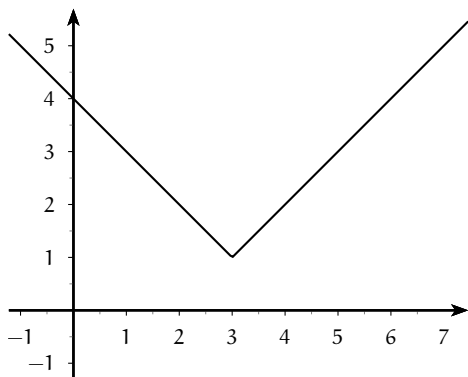
9 — Para cada par de funções f, g abaixo encontre o domínio e as expressões de $f \circ g$, $f \circ f$, $g \circ f$ e $g \circ g$.

- a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3$
 $g: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \sqrt{x - 1}$
- b) $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = -\frac{1}{x}$
 $g: (-\infty, 2] \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \sqrt{2 - x}$
- c) $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x}$
 $g: \mathbb{R} \setminus \{2, 3\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{(x-2)(x-3)}$
- d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \text{sen}(x)$
 $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \sqrt{x}$

10 — Para as seguintes funções $h(x)$, decompõe-a como compostas de funções mais simples;

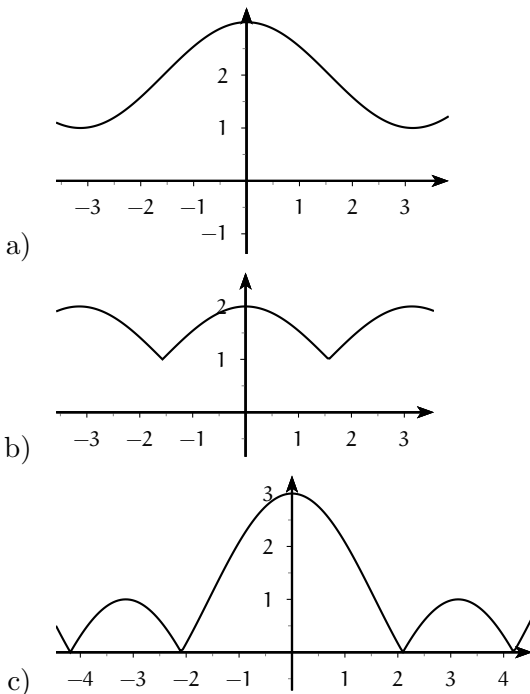
- a) $h(x) = \sin(x^2)$
- b) $h(x) = \sin(x + x^2)$
- c) $h(x) = \text{cosec}(\cos(x))$
- d) $h(x) = \sin(\frac{\cos(x)}{x})$
- e) $h(x) = \sec((x + 1)^2(x + 2))$
- f) $h(x) = \sin((\sin^7(x^7 + 1))^7)$
- g) $h(x) = \tan(x^2 + \sin(x^2 + (\cos^2(x))))$
- h) $h(x) = \sqrt{1 - x^2}$
- i) $h(x) = \sin(\cos(\frac{ax+b}{cx+d}))$
- j) $h(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{1 + x^2}}}$
- k) $h(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1 + x^2}}$
- l) $h(x) = x^{x^x}$
- m) $h(x) = e^{2x}$
- n) $h(x) = e^{\sqrt{1+x}}$
- o) $h(x) = \ln(2 + \frac{1}{x})$
- p) $h(x) = 2e^{x+1}$
- q) $h(x) = \tan(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}})$

11 — Dado o seguinte gráfico:



- Se soubermos que o gráfico anterior é o gráfico de $f(x+1)+2$ como é o gráfico de $f(x)$?
- Se soubermos que o gráfico anterior é o gráfico de $|f(x)|+1$ como poderia ser o gráfico de $f(x)$? (Forneça pelo menos duas respostas distintas)
- Se soubermos que o gráfico anterior é o gráfico de $|f(x)+1|$ como poderia ser o gráfico de $f(x)$? (Forneça pelo menos duas respostas distintas)

12 — Os seguintes gráficos foram obtidos a partir do gráfico da função $f(x) = \cos(x)$ através de translações, homotetias e módulos. Qual função que representa cada um dos gráficos a seguir:



13 — Encontre o domínio máximo de definição e esboce o gráfico das seguintes funções,, utilizando o gráfico de uma função mais simples e aplicando as transformações apropriadas. Para

cada uma dessas funções indique as intersecções com os eixos x e y , as regiões nas quais as funções são positivas, negativas, crescentes, decrescentes e os pontos de máximo e mínimo local se existirem.

- $\frac{1}{x+7}$
- $\frac{1}{x^2+4x+4}$
- $\frac{x+2}{x^2-1}$
- $\sqrt{|t-1|}-1$
- $\log_3(x-2)$
- $\log_2(|x|)$
- $\log_2(2x-|x-1|)$
- $\tan(x+\pi)$
- $\tan(-x)+2$
- $|\tan(x)|$
- $\tan(|x|)$
- $\tan(2x-|x-1|)$

14 — Faça os gráficos das seguintes funções modulares:

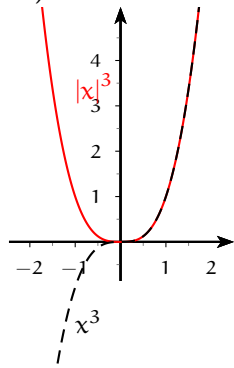
- $|x|$
- $|x|+|x-1|$
- $|x|+|x-1|+|x-2|$
- $|x^2-x|+3$
- $|x^2-x|+|x^2+1|$

Respostas dos Exercícios

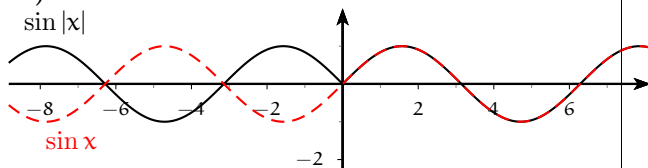
3 a.) $f(x) = x$, $f(x+2) = x+2$, $f(-x) = -x$
 e $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{x+h-x}{h} = 1$ d.) $f(x) = 5x^2 + 1$,
 $f(x+2) = 5(x+2)^2 + 1$, $f(-x) = 5(-x)^2 + 1 = 5x^2 + 1$
 e $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{5(x+h)^2 + 1 - 5x^2 - 1}{h} = \frac{5x^2 + 10xh + 5h^2 + 1 - 5x^2 - 1}{h} = \frac{5xh + 5h^2}{h} = 5x + 5h$

4 a.) O gráfico de $f(|x|)$ coincide com o gráfico de $f(x)$ para $x \geq 0$, isto é, do lado direito do eixo y . Para $x < 0$, o gráfico de $f(|x|)$ é a reflexão do gráfico de $f(x)$ relativamente ao eixo y .

b.)



d.)



5 O gráfico corresponde à função

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < -1 \\ -x & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ 2x & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ \frac{-2x+16}{3} & \text{se } 2 \leq x \end{cases}$$

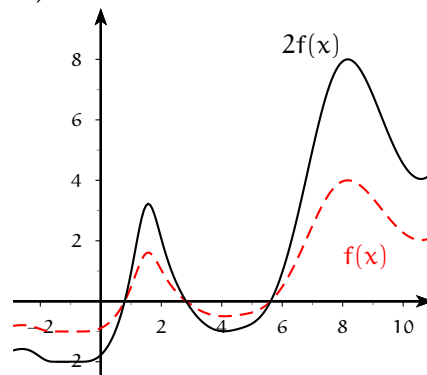
6 1. $\text{Dom } f = [-2, +\infty)$, $\text{Dom } g = \mathbb{R}$, $\text{Dom}(f+g) = \text{Dom } fg = [-2, +\infty)$;
 $\text{Dom } f \circ g = \mathbb{R}$, $\text{Dom } g \circ f = [-2, +\infty)$ e
 $(f \circ g)(x) = \sqrt{|x|+2}$; $(g \circ f)(x) = \sqrt{x+2}$

2. $\text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$, $\text{Dom } g = \mathbb{R}$, $\text{Dom}(f+g) = \text{Dom } fg = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$;
 $\text{Dom } f \circ g = \mathbb{R} \setminus \{0, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$, $\text{Dom } g \circ f = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$ e
 $(f \circ g)(x) = \frac{1}{x^2(x^2-2)}$; $(g \circ f)(x) = \frac{1}{x^2(x-2)^2}$

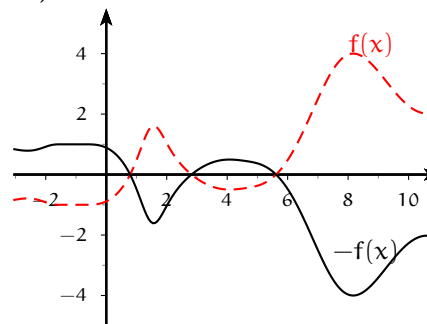
3. $\text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$, $\text{Dom } g = \mathbb{R}_+$, $\text{Dom}(f+g) = \text{Dom } fg = \mathbb{R}_+ \setminus \{0, 2\}$;
 $\text{Dom } f \circ g = \mathbb{R}_+ \setminus \{0, 4\}$, $\text{Dom } g \circ f = \mathbb{R}^* \text{ e }$
 $(f \circ g)(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}$; $(g \circ f)(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(x-2)}$

4. $\text{Dom } f = \mathbb{R}$, $\text{Dom } g = \mathbb{R}$, $\text{Dom}(f+g) = \text{Dom } fg = \mathbb{R}$;
 $\text{Dom } f \circ g = \mathbb{R}$, $\text{Dom } g \circ f = \mathbb{R}$ e
 $(f \circ g)(x) = \sqrt[5]{2-x^3}$; $(g \circ f)(x) = 2 - \sqrt[5]{x^3}$

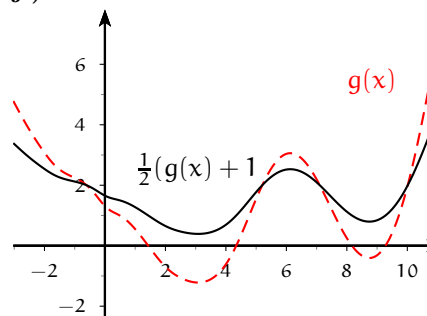
7 a.)



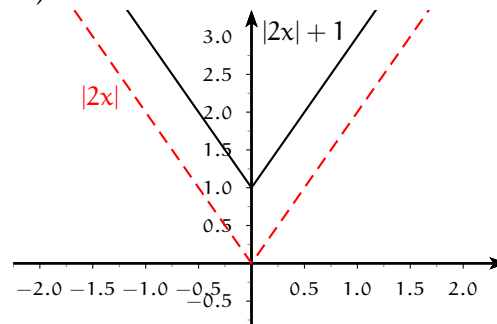
b.)



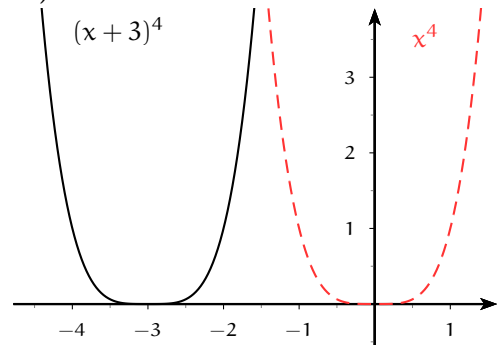
j.)



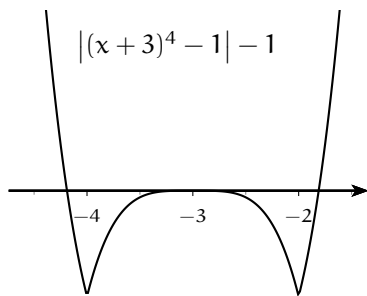
8 a.)



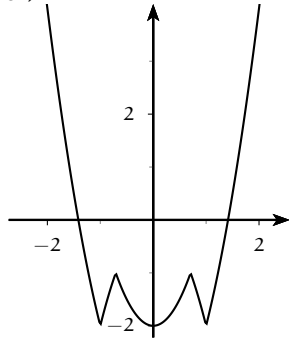
b.)



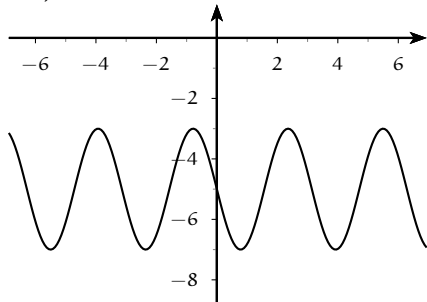
e.)



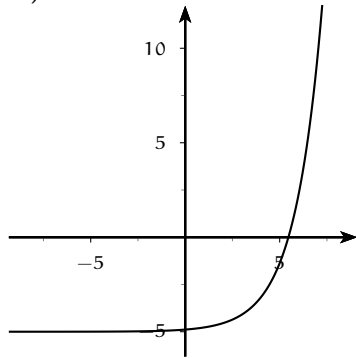
j.)



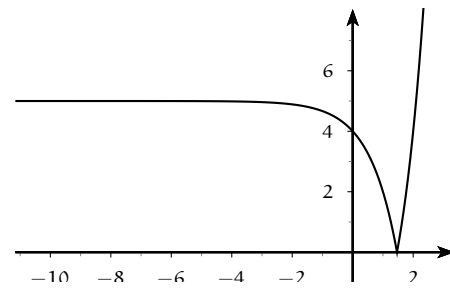
m.)



r.)



u.)

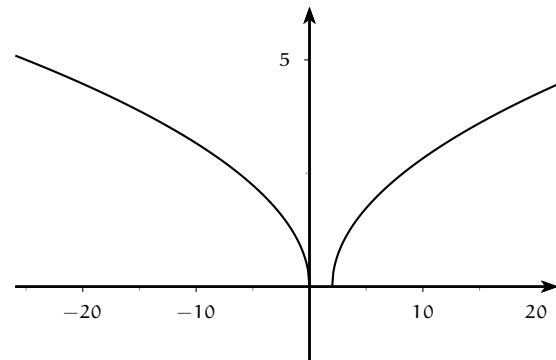


12 a.) $\cos(x) + 2$

b.) $|\cos(x)| + 1$

c.) $|2\cos(x) + 1|$

13 d.)



l.)

