

Lista 8

Bases Matemáticas

Funções Quadráticas, Exponenciais, Logarítmicas e Trigonométricas

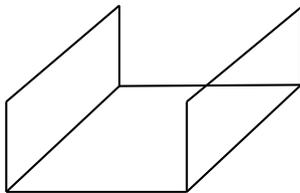
Funções Quadráticas

1 — Esboce o gráfico das seguintes funções, indicando em quais intervalos as funções são crescentes e decrescentes e encontrando as coordenadas dos pontos de máximo e/ou mínimo.

- a) $f(x) = (x - 4)^2 + 2$
- b) $f(x) = (x - 4)^2 - 2$
- c) $f(x) = -(x + 4)^2 + 2$
- d) $f(x) = -(x + 4)^2 - 2$
- e) $f(x) = x^2 - 1$
- f) $f(x) = x^2 - x$
- g) $f(x) = 6 - 4x + x^2$
- h) $f(x) = 2x^2 - 7x + 4$
- i) $f(x) = x^2 + 1$
- j) $f(x) = 3x^4 - 12x^2 - 1$

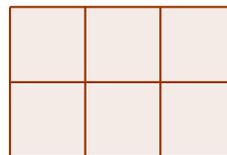
2 — Um fazendeiro pretende construir um chiqueiro retangular e para isso possui 100m de cerca. Ache as dimensões do chiqueiro de modo a maximizar a área do mesmo. Qual é essa área?

3 — Uma calha é feita dobrando uma folha de alumínio de 40cm de largura de modo que as laterais formem um ângulo reto com o fundo. Determine a profundidade da calha que maximiza o volume de água que a calha suporta.



4 — Um fazendeiro possui 2000m de cerca

para construir 6 currais conforme mostrados na figura abaixo. Ache as dimensões que maximizam a área cercada. Determine essa área.



5 — Um projétil é lançado no ar. A função que descreve sua altura em relação ao solo em função do tempo é dada por:

$$h(t) = h_0 + v_0 t + \frac{gt^2}{2}$$

sendo h_0 a altura inicial, v_0 a velocidade inicial e g a força da gravidade (constante).

- a) Em que instante de tempo a altura máxima é atingida?
- b) Depois de quanto tempo o projétil atinge o solo?
- c) Determine a altura máxima atingida pelo projétil se ele for lançado do solo.
- d) Para um projétil lançado do solo, o que acontece com sua altura se dobrarmos a velocidade inicial?

Exponencial

6 — Esboce o gráfico das seguintes funções, utilizando o gráfico de uma função mais simples e aplicando as transformações apropriadas. Para cada uma dessas funções indique as intersecções com os eixos x e y , as regiões nas quais as funções são positivas, negativas, crescentes, decrescentes e os pontos de máximo e mínimo local se existirem.

- a) $2^{(x-\pi)}$

- b) $3 \cdot 2^{(x-\pi)}$
- c) $\frac{1}{2}^{(x+\pi)}$
- d) $2^{(x-\pi)} - 5$
- e) $5^{|x|}$
- f) $5^{|x+2|}$
- g) $\frac{1}{3}^{x+1} + 2$
- h) $\frac{1}{3}^{|x|} - 2$

7 — Esboce o gráfico das funções $f(x)$ e $g(x)$ no mesmo sistemas de coordenadas cartesianas:

- a) $f(x) = 3^x$ e $g(x) = 3^{-x}$
- b) $f(x) = h^{-1}(x)$ com $h(x) = 3^x$ $g(x) = 3^{-x}$.

8 — A explosão da usina de Chernobil em 1986 lançou aproximadamente 1000 quilogramas do elemento radioativo cézio 137 na atmosfera. Sabendo que o cézio 137 possui uma meia vida de 30 anos, ou seja, a cada 30 anos a quantidade de cézio 137 cai pela metade.

- a) Escreva a função que descreve a massa de cézio na atmosfera em função do tempo.
- b) Determine em quanto tempo a massa de cézio na atmosfera reduzirá a 1kg.

Logaritmo

9 — Determine o domínio das seguintes funções:

- a) $\log 1 + x^2$
- b) $\log 1 - x^2$
- c) $\log \frac{1+x}{x}$
- d) $\log \cos(x)$

10 — Esboce os gráficos das seguintes funções:

- a) $\log(x+1)$
- b) $\log x^2$
- c) $\log -x$
- d) $\log |x|$

11 — Use as propriedades do logaritmo para expandir as expressões abaixo o máximo possível:

- a) $\log_9 9x$
- b) $\log_9 \frac{9}{x}$
- c) $\log_4 \frac{64}{\sqrt{x+1}}$
- d) $\log \sqrt[3]{\frac{x^2 y^3}{25}}$
- e) $\log \frac{1000x^4 \sqrt[3]{(5-x)}}{3(x+4)^2}$

12 — Use as propriedades do logaritmo para condensar as expressões abaixo o máximo possível:

- a) $\frac{1}{3}(\log_4(x) - \log_4(y))$
- b) $\frac{4}{3}(\log_4(x) - 2\log_4(y))$
- c) $4\log x + 7\log x + \log z$
- d) $3\log(x) - \frac{1}{2}\log z$
- e) $\frac{2}{3}(\log_4 x - \log_4 y) + 2\log_4(x+3)$

13 — Resolva as seguintes equações:

- a) $10^x = 15$
- b) $10^{x-3} = 100$
- c) $2^{2x} + 2^x - 12 = 0$
- d) $5^{2x+3} = 3^{x-1}$
- e) $\log_5(x-7) = 2$
- f) $\log_3(x-4) = -3$
- g) $\log_6(x+5) + \log_6(x) = 2$
- h) $\log_2(\sqrt{x+3}) = 1$
- i) $\log_2(x-3) + \log_2(x) - \log_2(x+2) = 2$

Funções Trigonômicas

14 — Determine o domínio das seguintes funções:

- a) $\text{tg}(1-x)$
- b) $\frac{1}{\cos(x)}$
- c) $\arccos \frac{2x}{1+x}$
- d) $3|\cos|x| - 1|$

15 — Esboce os gráficos das seguintes funções:

- a) $\cos 3x$
- b) $2 \operatorname{sen}(3x + \pi)$
- c) $\operatorname{sen}(x) + x$
- d) $\operatorname{tg}(|x|)$

16 — Calcule

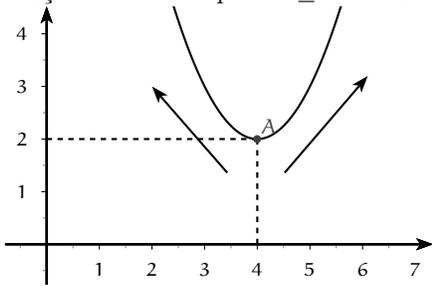
- a) $\operatorname{sen}(a)$ sabendo que $\cos(a) = b$ e $0 \leq a \leq \pi/2$
- b) $\operatorname{sen}(a)$ sabendo que $\operatorname{tg}(a) = b/c$ e $0 \leq a \leq \pi/2$
- c) $\operatorname{sen}(a)$ sabendo que $\operatorname{tg}(a) = b/c$ e $\pi/2 \leq a \leq \pi$
- d) $\operatorname{arcsen}(a)$ sabendo que $\operatorname{tg}(a) = b/c$ e $0 \leq a \leq \pi/2$
- e) $\operatorname{cotg}(a)$ sabendo que $\operatorname{sen}(a) = b/c$ e $0 \leq a \leq \pi/2$

17 — Calcule

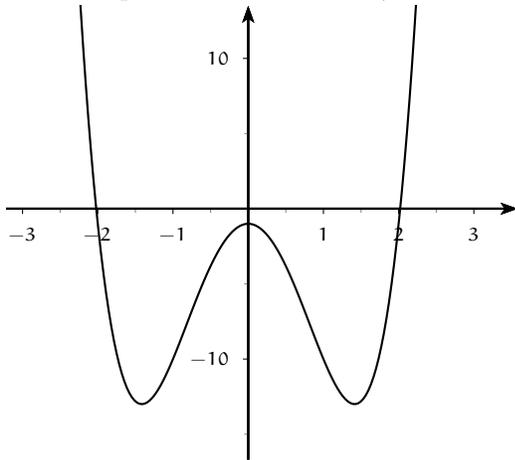
- a) $\operatorname{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
- b) $\operatorname{arctan}(1) - \operatorname{arctan}(-1)$
- c) $\operatorname{arcsen}(\cos(2x))$ $0 \leq x \leq \pi/2$
- d) $\operatorname{arcsen}(\cos(2x))$ $\pi/2 \leq x \leq 3\pi/2$

Respostas dos Exercícios

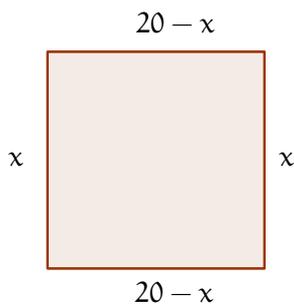
1 a.) Coordenadas do ponto de mínimo (4, 2). A função é crescente para $x \geq 4$ e decrescente para $x \leq 4$



j.) Dica: Faça a substituição $t = x^2$ para encontrar as raízes e os pontos de máximo e mínimo. Raízes: $-2, 2$ Pontos de mínimo: $(-\sqrt{2}, -13)$ e $(\sqrt{2}, -13)$. Decrescente para $x \leq -\sqrt{2}$ e $x \in [0, \sqrt{2}]$



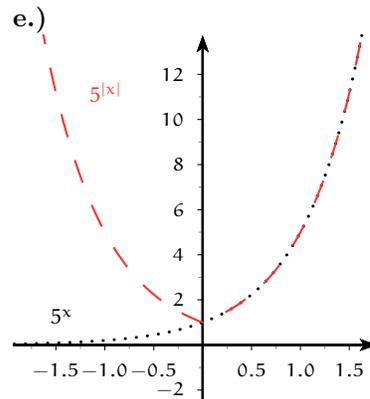
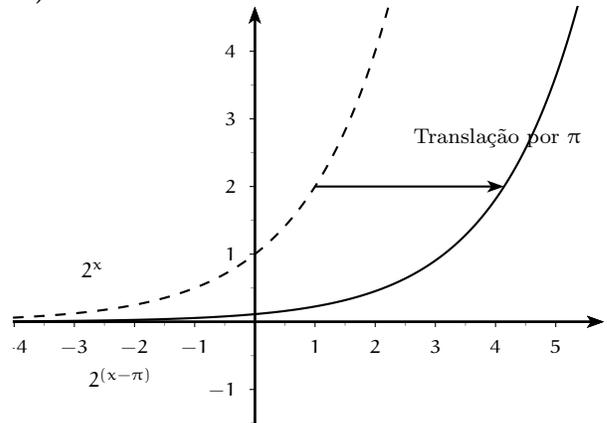
2 A área do chiqueiro é dada pela função $A(x) = x(20 - x) = 20x - x^2$



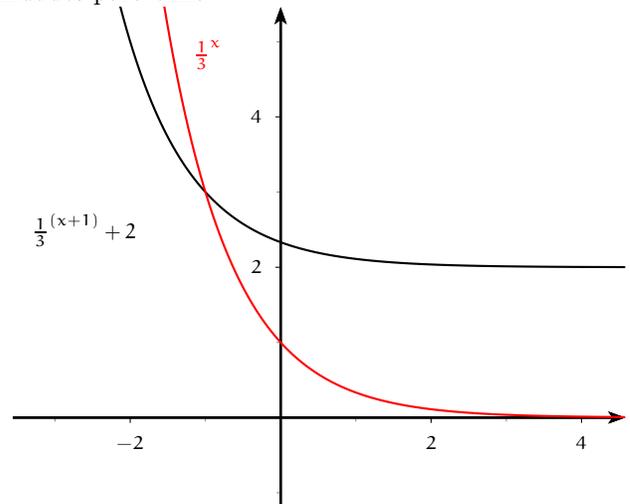
A coordenada x do vértice da parábola é $-b/2a$. Logo o máximo ocorre quando $x = 10$ e nesse caso o chiqueiro é um quadrado de área 100

5 a.) A altura máxima é atingida no tempo $t = -v_0/g$
 b.) Dica: procure a maior raiz da equação quadrática
 c.) Nesse caso $h_0 = 0$

6 a.)



e.) O gráfico de $\frac{1}{3}^{(x+1)} + 2$ é obtido transladando o gráfico de $\frac{1}{3}^x$ uma unidade para a esquerda e duas unidades para cima.



9 a.) \mathbb{R} b.) $-1 < x < 1$ c.) $x < -1$ ou $x > 0$ d.) O domínio é a união dos intervalos da forma $[-\pi/2 + 2 * k * \pi, \pi/2 + 2 * k * \pi]$ com $k \in \mathbb{N}$.

10 b.) Dica: $\log x^2 = 2 \log x$.

11 a.) $1 + \log_9 x$ b.) $1 - \log_9 x$ d.) $\log(y) + \frac{2 \log(x)}{3} - \frac{2 \log(5)}{3}$

12 a.) $\log_4 \left(\frac{x}{y} \right)^{\frac{1}{3}}$

13 a.) $\log_{10} 15$ **b.)** 5 **c.)** Dica: faça $t = 2^x$. **d.)**

14

$\mathbb{R} \setminus \{1 - \pi/2 + k\pi\}$ com $k \in \mathbb{N}$