NOTAS DE AULA

FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS - INTEGRAÇÃO

Cláudio Martins Mendes

Segundo Semestre de 2005

Sumário

Capítulo 1

Funções de Várias Variáveis - Integração

1.1 Integrais Iteradas

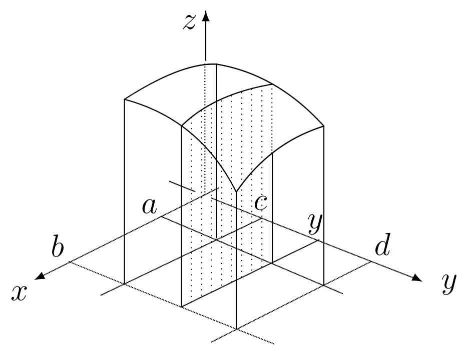
Suponhamos que $f(x, y)$ seja contínua num retângulo R, $a \le x \le b$, $c \le y \le d$. Consideremos

$$F(y) = \int_a^b f(x, y)dx$$

Prova-se que a função F é contínua em $[\ c, d\ ]$. Logo, tem sentido escrever:

$$\int_c^d F(y)dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx \right) dy\ .$$

Uma integral desse tipo é chamada integral iterada.



A região de integração das integrais iteradas não precisa, necessariamente, ser um retângulo. Podemos fazer integrais iteradas sobre regiões como exemplificam as figuras:

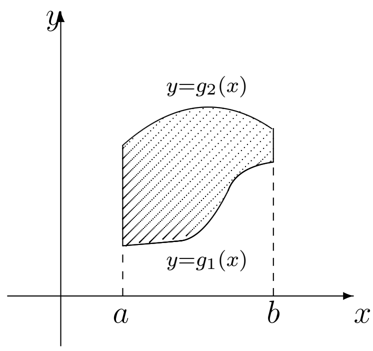


Figura 1

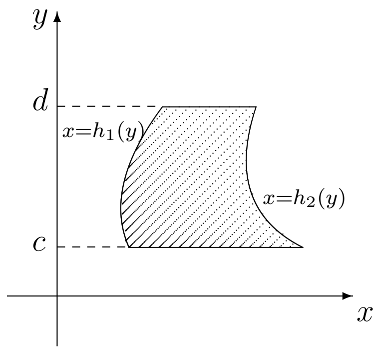


Figura 2

Na figura (1) temos:

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy\,dx \ .$$

Na figura (2) temos:

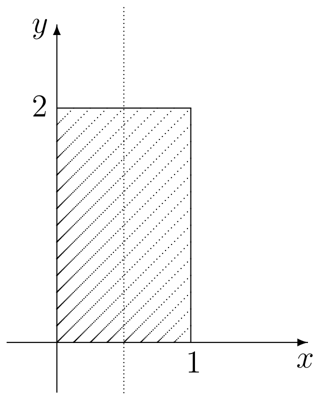
$$\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx\,dy \ .$$

Exemplos:

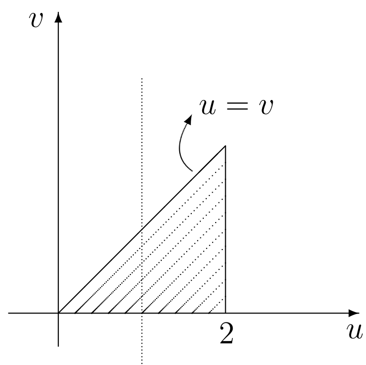
1. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^2 (x^2+y^2)dy\,dx = I$

$$I = \int_0^1 \left(x^2\,y + \frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^2 \,dx =$$

$$= \int_0^1 \left(2x^2 + \frac{8}{3}\right)dx = (\frac{2x^3}{3} + \frac{8}{3}\,x)\Big|_0^1 = \frac{10}{3}\,.$$

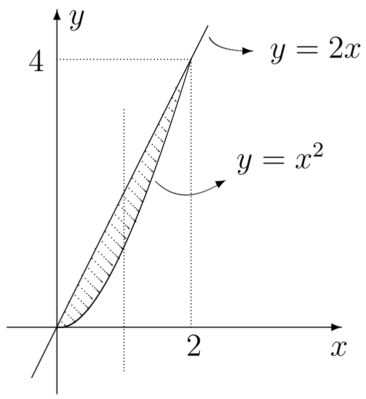


2. $\displaystyle\int_0^2 \int_0^u 5u^2\,v\,dv\,du$



3. $\displaystyle\int_0^1\int_0^1\int_0^1 (x^2 - yz)dz\,dy\,dx = \cdots = \frac{1}{12}$

4. $\displaystyle\int_0^2\int_{x^2}^{2x} (x^3 + 4y)dy\,dx = \cdots = \frac{32}{3}$

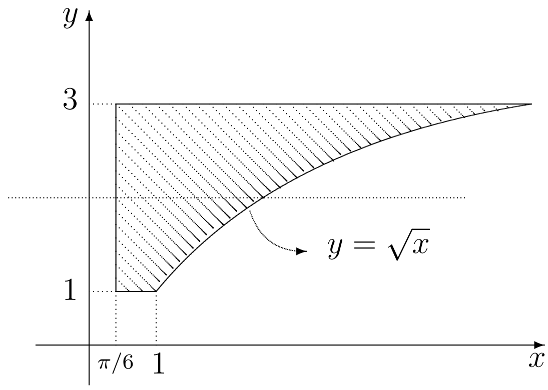


5. $\displaystyle\int_1^3\int_{\pi/6}^{y^2} 2y\cos x\,dx\,dy = I$

$$I = \int_1^3 2y \operatorname{sen} x\Big|_{\pi/6}^{y^2} dy \ =$$

$$= \int_1^3 \left(2y \operatorname{sen}\, y^2 - y\right) dy \ =$$

$$= \left(-\cos y^2 - \frac{1}{2}\,y^2\right)\Bigg|_1^3 = \cos 1 - \cos 9 - 4$$



Uma outra **notação** que usaremos para as integrais iteradas é:

$$\int_a^b dy \int_{h(y)}^{g(y)} f(x,y)dx\,, \quad \text{onde}$$

$$\int_a^b dy \int_{h(y)}^{g(y)} f(x,y)dx = \int_a^b\int_{h(y)}^{g(y)} f(x,y)dx\,dy\,.$$

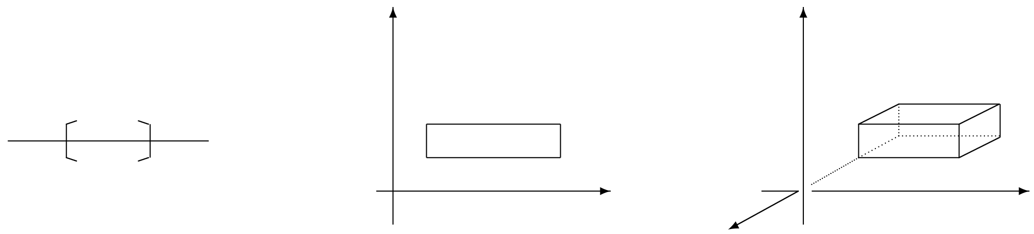
1.2 Integrais Múltiplas

Consideremos agora $f : B \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Problema: Definir a integral de f sobre B , análoga à definição para função de uma variável.

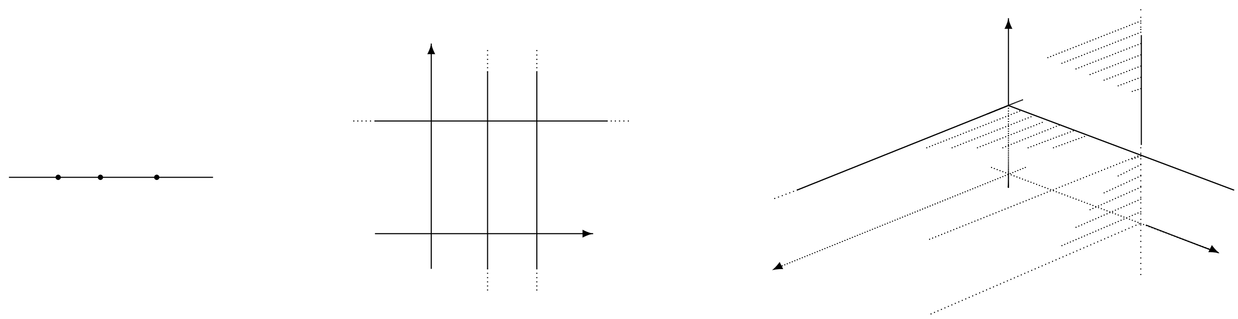
Um retângulo coordenado fechado R no $\mathbb{R}^n$ é um subconjunto do $\mathbb{R}^n$ constituído de todos os pontos $x = (x_1, \ldots, x_n)$ que satisfazem às desigualdades:

$$a_i \leq x_i \leq b_i \quad , \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$



O volume de R, denotado por $V(R)$, é definido como $V(R) = (b_1 - a_1)\cdots(b_n - a_n)$. Se para algum i, $a_i = b_i$, então o retângulo é degenerado e $V(R) = 0$.

Um número finito de planos $n-1$ dimensionais no $\mathbb{R}^n$, paralelos aos planos coordenados, é chamado uma rede.

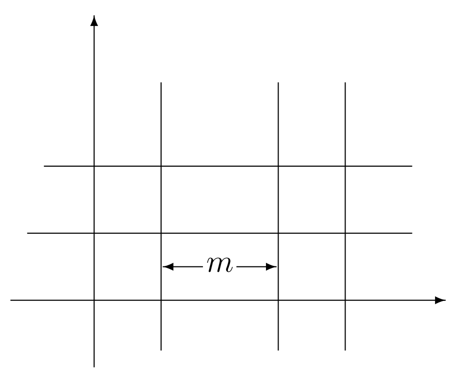


Uma rede sempre divide o $\mathbb{R}^n$ em um número finito de conjuntos limitados (retângulos) e um número finito de conjuntos não limitados.

Dizemos que uma rede cobre um conjunto $B \subset R^n$, se este estiver contido na reunião dos retângulos fechados $R_1, \ldots, R_r$, por ela determinados.

Claramente, um conjunto pode ser coberto por uma rede se, e somente se, ele é limitado.

Malha da rede será o maior comprimento dos lados dos retângulos por ela determinados.



m = malha da rede

Definição 1.2.1. *Sejam* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *e* $B \subset \mathbb{R}^n$ *, tais que:*

a) B *é um subconjunto limitado.*

b) f *é limitada sobre* B *.*

Seja ainda:

$$f_B(x) = \begin{cases} f(x) & se \quad x \in B \\ 0 & se \quad x \notin B \ . \end{cases}$$

Tomemos G *uma rede que cobre* B *e que tenha malha* $m(G)$*. Em cada um dos retângulos coordenados* R_i *determinados por* G *,* $i = 1, \ldots, r$ *, escolhemos um ponto arbitrário* P_i *.*

A soma:

$$\sum_{i=1}^{r} f_B(P_i)V(R_i)$$

é chamada uma soma de Riemann de f sobre B .

Dados f e B , este valor depende da rede G e dos pontos escolhidos $P_1, \ldots, P_r$.

Se, variando as redes G , com $m(G)$ tendendo a zero,

$$\lim_{m(G)\to 0} \sum_{i=1}^{r} f_B(P_i)V(R_i)$$

existe ele é chamado a integral de f sobre B , sendo denotado por:

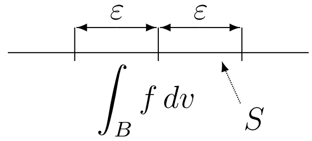
$$\int_B f dv$$

Se a integral existe, então f é dita integrável sobre B .

$$\lim_{m(G)\to 0} \sum_{i=1}^{r} f_B(P_i)V(R_i) = \int_B f dv$$

significa que para $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$, tal que se G é qualquer rede que cobre B e tem malha menor que δ , sendo S uma soma de Riemann arbitrária para f_B formada de G , então:

$$\left| S - \int_B f dv \right| < \varepsilon \ .$$



Notações:

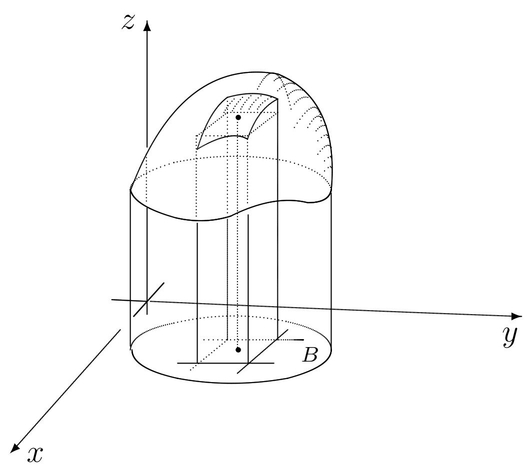
$$\int_B f\,dA \qquad \int_B f(x,y)dx\,dy \qquad \int\int_B f(x,y)dx\,dy \qquad n=2$$

$$\int_B f(x,y,z)dx\,dy\,dz \qquad \int\int\int_B f(x,y,z)dx\,dy\,dz \qquad n=3$$

$$\int_B f(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n\,.$$

Para interpretar, geometricamente, o significado da integral dupla $\int_B f(x,y)dx\,dy$, suporemos f positiva e contínua sobre B (supondo a existência da integral).

Então, o gráfico de f é uma superfície que está acima do plano xy. A soma de Riemann é a soma dos volumes dos paralelepípedos cujas bases são os retângulos determinados pela rede e cujas alturas correspondentes são os valores $f(x_i\,,\,y_i)$.



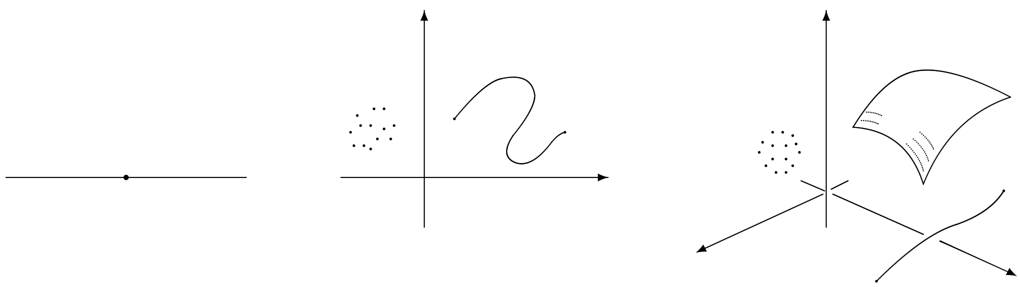
Quando a malha da rede tende a zero, essas somas vão se aproximando do que podemos chamar volume do sólido S , delimitado pelo domínio B , pelo gráfico de f , e pelas retas que passam pela fronteira de B e são paralelas ao eixo z . Definimos então:

$$\boxed{V(S)=\int_B f(x,y)dx\,dy\,.}$$

Surge a primeira pergunta: Quais seriam as condições, sobre a função f e sobre o conjunto B, que poderiam garantir a existência da $\int_B f\,dv$?

Vejamos uma definição, antes de enunciarmos o Teorema que dará a resposta a esta pergunta.

Definição 1.2.2. Conjunto suave *em* $\mathbb{R}^n$ *é a imagem de um conjunto compacto sob uma função* $\phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $m < n$ *e* ϕ *de classe* C^1. *Conjunto suave em* $\mathbb{R}$ *será entendido como um conjunto unitário.*



Tipos de Conjuntos Suaves

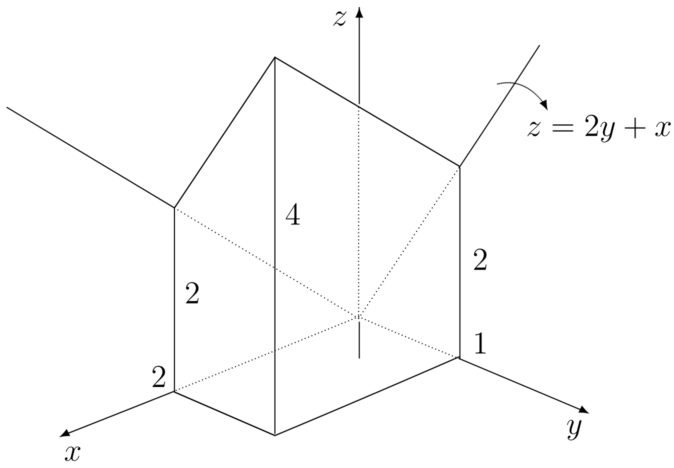
A idéia intuitiva de conjunto suave é a de que o conjunto deve ter "volume" nulo no espaço em que estiver contido.

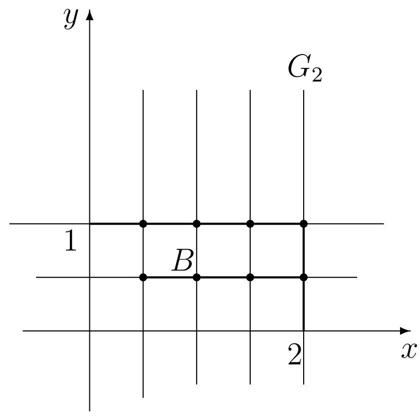
Teorema 1.2.3. *Seja* $B \subset \mathbb{R}^n$, *limitado, tal que a fronteira de* B *esteja contida em um número finito de conjuntos suaves. Seja ainda* f *definida e limitada em* B. *Se* f *é contínua sobre* B, *exceto talvez sobre um número finito de conjuntos suaves, então* f *é integrável sobre* B. *O valor de* $\int_B f dv$ *não se altera por troca de valores de* f *sobre qualquer conjunto suave.*

Exemplo:

$$\int_B (2y + x) dx\, dy\,,$$

onde $B\,\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; 0 \le x \le 2 \;\text{ e }\; 0 \le y \le 1\}$





Observe que a existência da integral está assegurada pelo Teorema anterior. Por esta razão, qualquer seqüência de somas de Riemann associadas a redes que têm malhas tendendo a zero, pode ser usada para avaliar a integral.

Para cada $n = 1, 2, 3, \ldots$ consideremos a rede G_n constituída das retas $x = \dfrac{i}{n}$, $i = 0, \ldots, 2n$ e $y = \dfrac{j}{n}$, $j = 0, \ldots, n$.

Temos:

$m(G_n) = \dfrac{1}{n}$

área de $R_{ij} = \dfrac{1}{n^2}$.

Em cada um dos retângulos coordenados, escolhemos os pontos $x_{ij} = (x_i\,,\, y_j) = \left(\dfrac{i}{n}\,,\, \dfrac{j}{n}\right)$ $i = 1, \ldots, 2n$; $j = 1, \ldots, n$.

Formamos então a soma de Riemann:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{n} (x_i + 2y_j) A(R_{ij}) \;&=\; \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{i}{n} + \frac{2j}{n}\right) \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{n} (i + 2j) \;= \\
&=\; \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{2n} \left(ni + 2 \cdot \frac{1+n}{2} \cdot n\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{2n} (i + 1 + n) \;= \\
&=\; \frac{1}{n^2} \left[\frac{(1+2n)}{2} \cdot 2n + (1+n) \cdot 2n\right] \;= \\
&=\; \frac{2}{n} \left(\frac{1+2n}{2} + 1 + n\right) = 4 + \frac{3}{n}
\end{aligned}$$

$$\therefore \int_B (2y+x)dx\,dy = \lim_{n\to\infty}(4+\frac{3}{n}\ ) = 4$$

.

Observação: Compare este resultado com o volume do sólido S sob o gráfico de $f(x,y) = 2y+x$ e acima de $[0,2]\times[0,1]$. (Neste caso particular o volume é de cálculo direto)

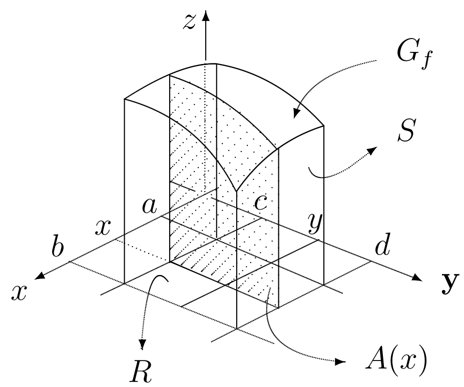
O exemplo anterior mostra que uma avaliação direta da integral múltipla pode ser muito difícil. Agora vamos avançar no sentido de vencer esta dificuldade.

— o – o – o – o – o – o – o – o —

Antes de prosseguirmos, vejamos um caso especial:

Consideremos $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$, f contínua e $f\geq 0$.

Foi visto em Cálculo de uma Variável que: $\quad Vol(S) = \int_a^b A(x)dx$



Observemos que nesta situação temos $A(x) = \int_c^d f(x,y)dy$

Assim $Vol(S) = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\ \right)dx$

Pelo visto anteriormente, também temos: $Vol(S) = \int_R f(x,y)dx\ dy$

Logo, pelo menos neste caso,

$$\int_R f(x,y)dx\ dy\ = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\ \right)dx$$

ou seja, a integral múltipla é igual à integral iterada.

Surge então a pergunta geral:

O que dizer da integral múltipla, relativamente à integral iterada, quando ambas estão definidas?

O Teorema a seguir dará a resposta à esta pergunta.

Teorema 1.2.4. (Teorema de Fubini) *Seja B um subconjunto do $\mathbb{R}^n$ tal que a integral iterada*

$$\int d\,x_1 \int d\,x_2 \cdots \int f\,d\,x_n$$

existe sobre B. Se a integral múltipla $\displaystyle\int_B f dv$ existe, então as duas integrais são iguais.

Corolário 1.2.5. *Se $\displaystyle\int_B f dv$ existe e as integrais iteradas existem para algumas ordens de integração, então todas as integrais são iguais.*

Exemplos:

1. Avaliar a integral $\displaystyle\int_B (2y+x)dx\,dy$, onde B é o retângulo $0 \leq x \leq 2$ e $0 \leq y \leq 1$.

   Aplicando os Teoremas anteriores temos:

$$\int_B (2y+x)dx\,dy = \int_0^2 dx \int_0^1 (2y+x)dy = \int_0^2 (1+x)dx = (x+\frac{x^2}{2})\Big|_0^2 = 2+2 = 4$$

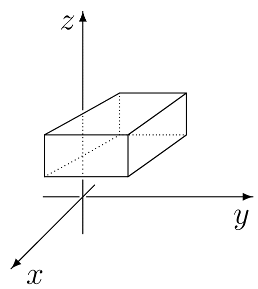
2. Seja R o retângulo definido por $-1 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$, $1 \leq z \leq 2$.

   Considere $f(x,y,z) = xyz$.

   Então:

$$\int_R f\,dv = \int_R xyz\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \int_{-1}^2 dx \int_0^2 dy \int_1^2 xyz\,dz = \cdots = \frac{9}{8}.$$



Observação: Registramos aqui o fato de que é possível a existência da integral iterada sem que exista a integral múltipla.

Exemplo:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } x \text{ é racional} \\ 2y & , \text{ se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

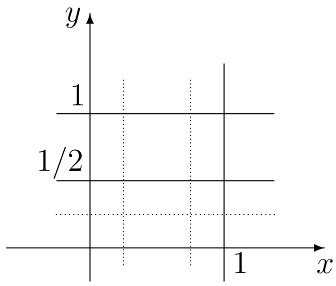
$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy = \int_0^1 1\, dx = 1\,.$$

Mas $\displaystyle\int_R f\, dA$ não existe, onde $R = [0,1] \times [0,1]$.

De fato:

Seja G uma rede, do tipo ao lado, cobrindo R.

Vamos formar duas somas de Riemann, a partir da rede G.

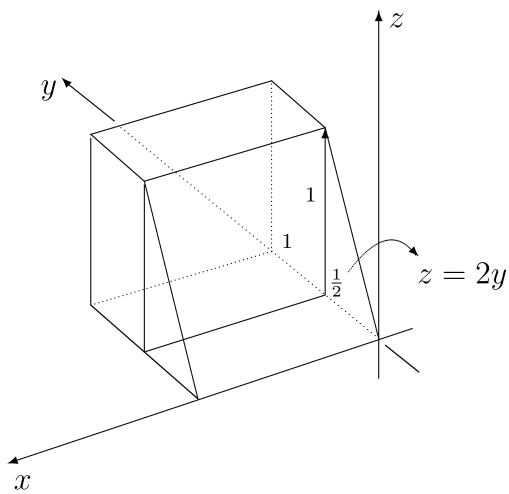


Primeira Soma: nos retângulos coordenados escolhemos pontos $(x_i\,,\, y_j)$, tais que $x_i \in Q$. Logo, $S_1 = 1$.

Segunda Soma: até a altura $y = \dfrac{1}{2}$ escolhemos pontos (x_i, y_j) nos retângulos coordenados tais que $x_i \notin Q$. Logo, esta parcela da soma de Riemann converge para $\dfrac{1}{4}$ à medida que $m(G) \to 0$. Depois de $y = \dfrac{1}{2}$ escolhemos pontos (x_i, y_j), tais que $x_i \in Q$. Esta segunda parcela da soma de Riemann dará $\dfrac{1}{2}$.

Assim, $S_2 \to \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{4}$.

Deste modo, as somas de Riemann não convergem para nenhum número real.



Seja a função $f \equiv 1$ integrável sobre um conjunto $B \subset R^n$. Então definimos volume de B

como sendo:

$$V(B) = \int_B 1\, dv = \int_B dv\ .$$

No caso de $B \subset R^2$ o volume anteriormente definido é o que chamamos de área. Escrevemos, então, $A(B)$ e não $V(B)$.

Segue, da última parte do Teorema 13 que o volume de um conjunto suave é igual a zero:

$$V(S) = \int_S 1\, dv = \int_S 0\, dv = 0\ .$$

Para alguns conjuntos B, a integral $\int_B dv$ não existe. Quando isto acontece, o volume de B não está definido.

Exemplo:

$B = [0,1] \cap Q$

$\displaystyle\int_B dx$ não existe (Pense em dois tipos de somas de Riemann)

Observação 1: Para retângulos R o volume $V(R)$ tem sido definido de duas maneiras:

(i) Como produto dos comprimentos dos lados.

(ii) Como uma integral.

As duas definições são compatíveis pelos Teoremas 1.2.3 e 1.2.4 .

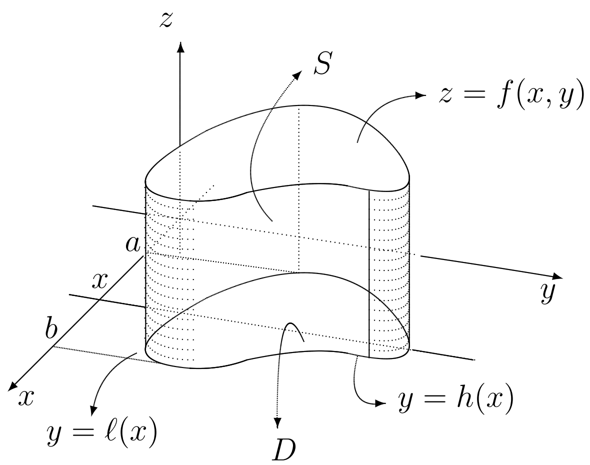
$$\int_R dv = \int_{a_1}^{b_1} dx_1\ \cdots\ \int_{a_n}^{b_n} dx_n = (b_1 - a_1)\ \cdots\ (b_n - a_n)\,.$$

Observação 2: Seja $f(x,y) \geq 0$, tal que $\displaystyle\int_D f dA$ exista, onde $D \subset \mathbb{R}^2$.

Na situação ao lado, o volume do sólido S tem sido definido de duas maneiras, que são compatíveis, pois:

$$V(S) = \int_S 1\, dv = \int_a^b dx \int_{\ell(x)}^{h(x)} dy \int_0^{f(x,y)} dz\ =$$

$$= \int_a^b dx \int_{\ell(x)}^{h(x)} f(x,y) dy = \int_D f dA\,.$$

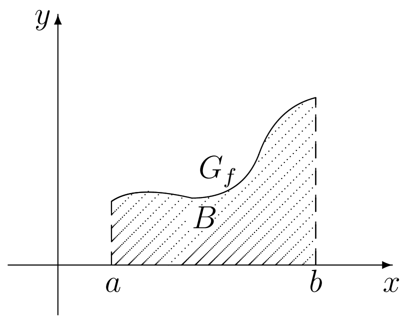


Exercícios resolvidos:

1. Seja B a região do plano representada abaixo. Calcule a área de B .

$$A(B) = \int_B dA = \int_a^b dx \int_0^{f(x)} dy \; =$$

$$= \int_a^b f(x) dx\,.$$

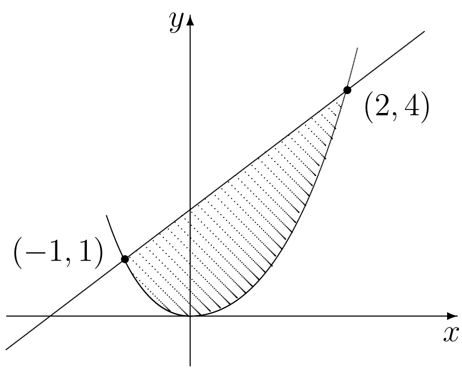


2. Calcular a área entre a parábola $y = x^2$ e a reta $y = x + 2$, representada abaixo:

$$A = \int_{-1}^{2} dx \int_{x^2}^{x+2} dy$$

ou

$$A = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx + \int_1^4 dy \int_{y-2}^{\sqrt{y}} dx\,.$$



(Note como é importante a ordem de integração)

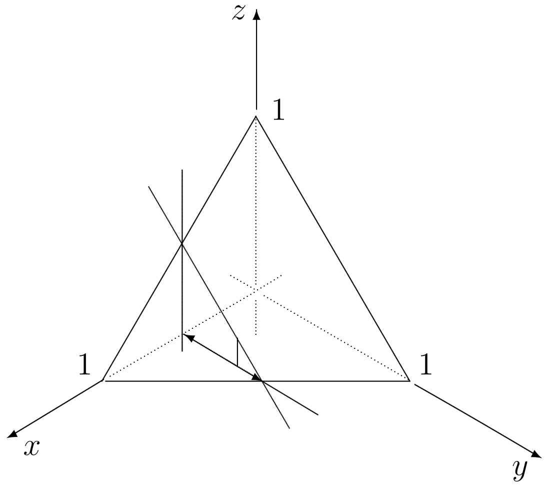
3. Ache o volume da região $B \subset R^3$, limitada pelos planos coordenados $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $x + y + z = 1$

$$V(B) = \int_B dv = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz = \cdots = \frac{1}{6}$$

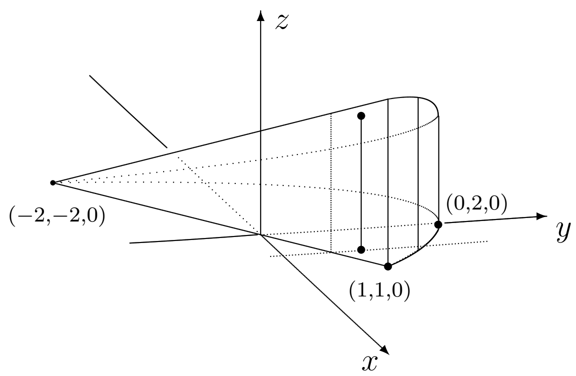
Poderíamos resolver também pensando

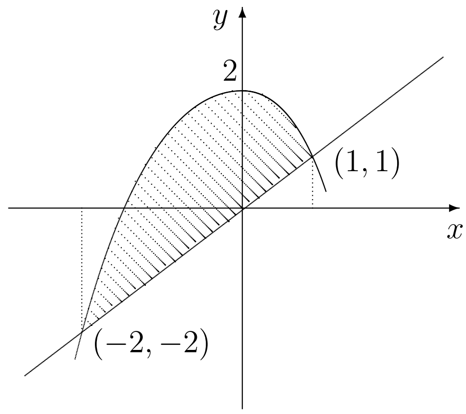
como o gráfico de $f(x,y) = 1 - x - y$

$$V(B) = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1 - x - y)dy = \cdots = \frac{1}{6}$$



4. Determine o volume do sólido cuja base é a região do plano xy delimitada pela parábola $y = 2 - x^2$ e pela reta $y = x$ e cuja parte superior está contida no plano $z = x + 2$.





$$V = \int_{-2}^{1} dx \int_{x}^{2-x^2} dy \int_0^{x+2} dz = \cdots = \frac{27}{4}$$

ou

$$V = \int_{-2}^{1} dx \int_{x}^{2-x^2} (x+2)dy = \cdots = \frac{27}{4}$$

—— / / —— / / ——

Regra Geral: Para estabelecer os limites de uma integral iterada, devemos primeiramente escolher as variáveis externa, intermediária e interna. Digamos, por exemplo, x, y e z respectivamente.

Primeira Etapa:

Achar os valores extremos da variável externa. Por exemplo:

$$\int_a^b dx \int dy \int f(x,y,z)dz\,.$$

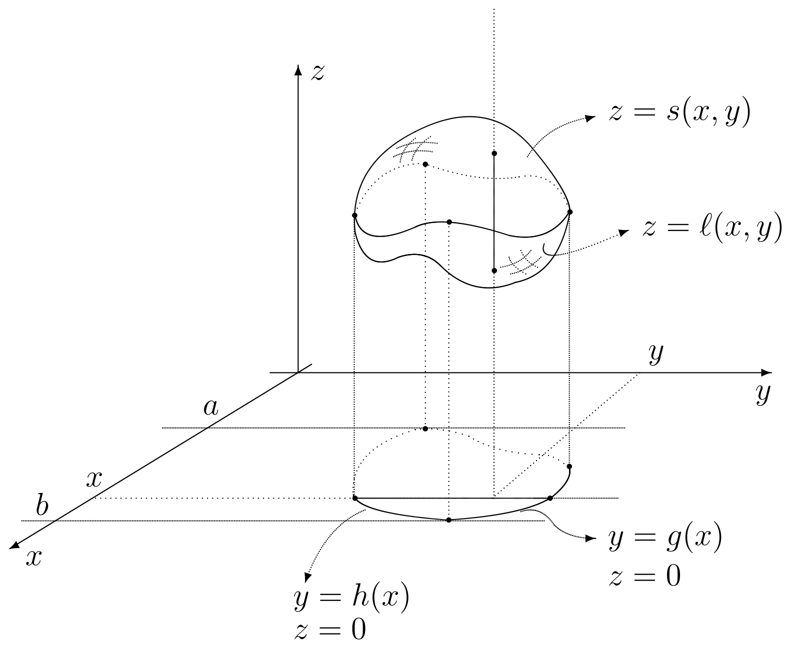
Segunda Etapa:

Fixe a variável externa num determinado valor, determinando um corte na região sólida. Determine os valores extremos da variável intermediária neste corte. Por exemplo:

$$\int_a^b dx \int_{h(x)}^{g(x)} dy \int f(x,y,z)dz\,.$$

Terceira Etapa:

Fixe agora, neste corte, a variável intermediária, obtendo um segmento de reta. Determine os valores extremos da variável interna. Por exemplo:



$$\int_a^b dx \int_{h(x)}^{g(x)} dy \int_{\ell(x,y)}^{s(x,y)} f(x,y,z)dz$$

— // — // —

Vejamos agora algumas propriedades das integrais múltiplas

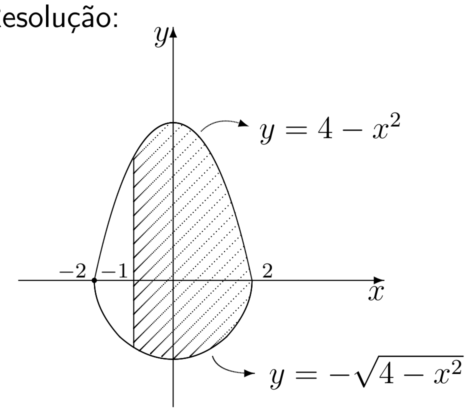
1. Se f e g são integráveis sobre B e se a, b são números reais, então $af + bg$ é integrável sobre B e
$$\int_B (af + bg)dv = a\int_B f\,dv + b\int_B g\,dv$$
2. Se $f \geq 0$ é integrável sobre B, então
$$\int_B f\,dv \geq 0$$
3. Se f e g são integráveis sobre B e $f \leq g$ sobre B, então:
$$\int_B f\,dv \leq \int_B g\,dv$$
4. Se f é integrável sobre cada um dos conjuntos disjuntos B_1 e B_2, então f é integrável sobre $B_1 \cup B_2$ e
$$\int_{B_1 \cup B_2} f\,dv = \int_{B_1} f\,dv + \int_{B_2} f\,dv$$

   Observemos que isto generaliza a seguinte propriedade: $(a \leq c \leq b)$
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Exercícios resolvidos:

1. Desenhe a região de integração referente à integral $\displaystyle\int_{-1}^{2} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{4-x^2} dy$

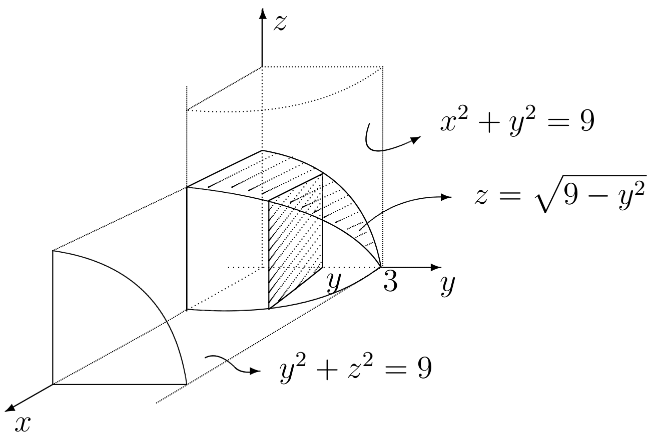
   Resolução:



2. Encontre o volume do sólido limitado pelos gráficos de $x^2 + y^2 = 9$ e $y^2 + z^2 = 9$.

   Resolução:

   Notemos inicialmente que o gráfico de cada uma das equações representa um cilindro, com eixo sendo um dos eixos coordenados e raio igual a 3. A representação da porção do sólido situada no primeiro octante seria:



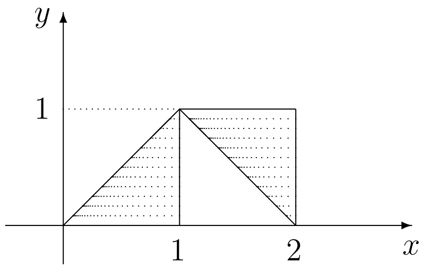
Assim, calculando como volume sob o gráfico da função $f(x, y) = \sqrt{9 - y^2}$ temos: $V = 8. \displaystyle\int_0^3 dy \int_0^{\sqrt{9-y^2}} \sqrt{9 - y^2}\ dx = ... = 144$

3. (a) Desenhe a região de integração $\displaystyle\int_0^1 dx \int_0^x dy\ +\ \int_1^2 dx \int_{2-x}^1 dy$

(b) Sem calcular, dê o valor da integral.

Resolução:

(a)



(b) Observemos que a integral representa a área da região formada por dois triângulos de base 1 e altura 1 e assim seu valor é 1.

4. Dada a expressão

$$\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} dy\ +\ \int_{-1}^0 dy \int_{3-\sqrt{1-y^2}}^{3+\sqrt{1-y^2}} dx$$

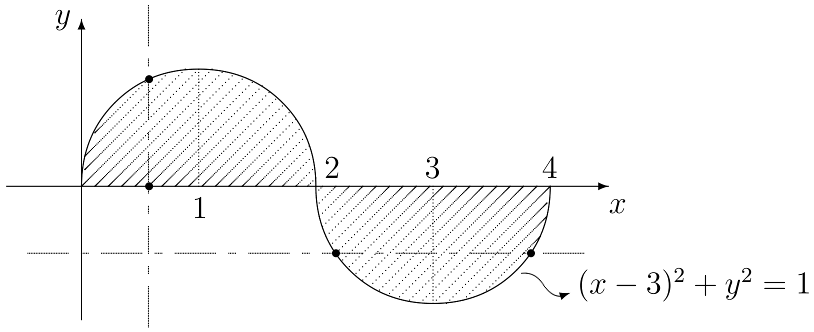
Pede-se:

(a) Região de integração.

(b) Valor da integral.

Resolução:

(a)



(b) Observemos que a integral representa a área da região anterior, a qual é igual a área do circulo de raio 1, e assim o valor da integral é π.

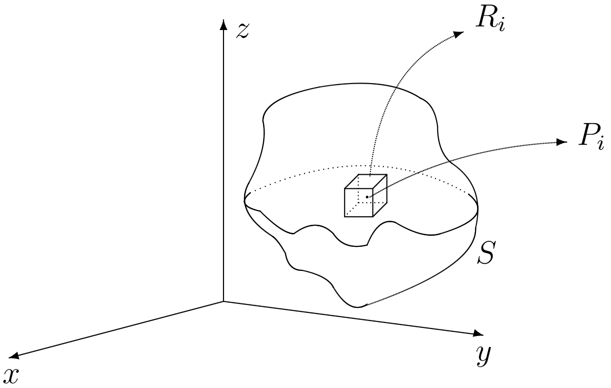
5. Ache a massa do cilindro C a seguir, se a densidade em cada ponto é proporcional a distância à base inferior.

Resolução:

Aproveitemos este exercício para introduzir a Situação Geral:

Seja um sólido S, com densidade $\rho(P)$ no ponto P, sendo a função ρ contínua sobre S. Por definição:

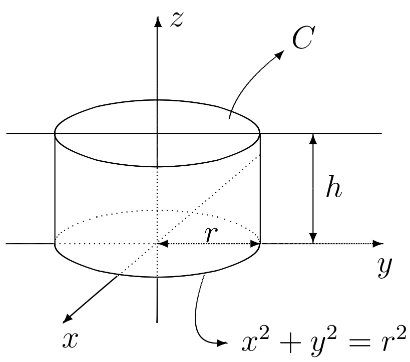
$$\text{Massa} = \text{M} = \lim_{m(G)\to 0} \sum_i \rho(P_i) Vol(R_i) = \int_S \rho \; dv$$



No caso particular de termos $\rho(P) \equiv K = \mathit{constante}$ podemos escrever:

$$\text{M} = \int_S \rho \; dv = \rho \int_S dv = \rho . Vol(S)$$

Voltando então ao caso do exercício proposto temos: $\rho(x, y, z) = Kz$



Assim:

$\mathsf{M} = \displaystyle\int_C \rho(x,y,z)dxdydz \;=\; \int_{-r}^{r} dx \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} dy \int_0^h Kzdz \;=\; 4K \int_0^r dx \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} dy \int_0^h zdz \;=$

$= 4K \displaystyle\int_0^r dx \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} \frac{h^2}{2}\, dy \;=\; 2Kh^2 \int_0^r \sqrt{r^2-x^2}dx \;=\; 2Kh^2\, \frac{1}{4}\, \pi r^2 = \frac{1}{2}Kh^2r^2\pi.$

Estamos usando a simetria do problema (da região e da função) e ainda que $\displaystyle\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\, dx$ é igual a um quarto da área do circulo de raio r.

Exercícios propostos 1.2

1. Desenhe a região de integração para a integral iterada: $\displaystyle\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dx$

2. Calcule $\displaystyle\int_R f\, dv$ para as seguintes escolhas de f e R

   (a) $f(x,y,z) = \sqrt{x+y+z}$

   R : Cubo de vértices $(0,0,0),\ (1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1),\ (1,0,1),\ (0,1,1),\ (1,1,0)$ e $(1,1,1)$.

   (b) $f(x,y,z) = x^2yz$

   R : Tetraedro de vértices $(0,0,0),\ (1,0,0),\ (1,1,0)$ e $(1,1,1)$.

   (c) $f(x,y,z) = x + z$

   R : $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ \ x \geq 0,\ \ y \geq 0,\ \ z \geq 0.$

3. Determinar o volume do sólido no 1º octante limitado pelos planos coordenados e os gráficos das equações: $z = x^2 + y^2 + 1$ e $2x + y = 2$.

4. Justifique as desigualdades:

   (a) $0 \leq \int_R (x^2 + y^2) dx\, dy \leq 30$ $\quad$ R : $[0,1] \times [0,3]$.

   (b) $\dfrac{4}{3} \leq \int_R e^{xy} dx\, dy \leq \dfrac{4e^2}{3}$ $\quad$ R : $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 + x^2 \end{cases}$

   (c) $84\,\pi\, e^{-16} \leq \int_R e^{-x^2-y^2-z^2} dx\, dy\, dz \leq 84\,\pi\, e^{-1}$ $\quad$ R : $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 16$.

5. Se D é a região triangular limitada pelas retas $2y = x$, $y = 2x$ e $x = \pi$, calcule $\displaystyle\int_D \operatorname{sen} y\, dA$.

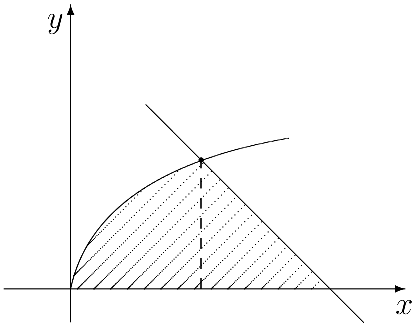
6. Seja D o conjunto de pontos $(x, y) \in R^2$, tais que $x \geq 0$, $y \geq x^2$ e $y \leq 2 - x^2$. Calcule $\displaystyle\int_D \sqrt{xy}\, dA$.

7. Ao se estabelecer a integral dupla que dará o volume V sob o parabolóide $z = x^2 + y^2$ e acima de uma certa região R do plano xy, chegou-se a seguinte expressão:

$$V = \int_0^1 dy \int_0^y (x^2 + y^2) dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} (x^2 + y^2) dx\,.$$

   Desenhe a região R.

8. Ache a área da região do plano xy limitada pelos gráficos de $x = y^3$, $x + y = 2$ e $y = 0$, desenhada abaixo.

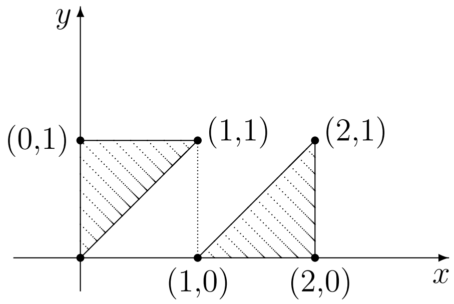


9. Justifique a afirmação, usando as propriedades conhecidas das integrais:

Se f é contínua em uma região limitada $R \subset R^2$ com fronteira de R contida em um número finito de conjuntos suaves, então:

$$\left| \int_R f(x,y)dx\,dy \right| \leq \int_R |f(x,y)|\,dx\,dy$$

10. Calcule a integral $\displaystyle\int_B x\,dx\,dy$ onde B é o conjunto representado a seguir:



11. Responda, justificando:

    (a) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } \; x \neq \dfrac{1}{n} \quad , \quad n \in N \\[2ex] \dfrac{1}{n} & , \text{ se } \; x = \dfrac{1}{n} \quad , \quad n \in N \end{cases}$$

    Considere $B = [\,\dfrac{1}{4}\,, 1\,] \times [\,0, 2\,]$.

    Então, $\displaystyle\int_B f\,dA = \frac{3}{2}$.

    (b) $2\,\pi\,e^{-4} \leq \displaystyle\int_R e^{-x^2-y^2}dx\,dy \leq 2\pi$, onde $R = \left\{(x,y) \in R^2 \;/\; \dfrac{x^2}{4} + y^2 \leq 1\right\}$.

    (c) $V(B) = \sqrt{2}$, onde $B = \left\{\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right) \;/\; n \in N\right\} \cup \{(0,0)\}$.

1.3 Mudança de Variáveis

A troca de variáveis para integrais 1-dimensionais é dada por:

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\phi(u))\phi'(u)du \qquad (x = \phi(u))$$

Este resultado será estendido para dimensões mais altas.

Num espaço n-dimensional, uma troca de variáveis é efetuada por uma transformação $\mathbb{R}^n \xrightarrow{T} \mathbb{R}^n$.

No que se segue, é mais conveniente tomar o espaço domínio e o espaço de chegada como distintos. Assim, consideramos T como uma transformação de uma cópia do $\mathbb{R}^n$ (a qual chamamos de U^n), em outra do $\mathbb{R}^n$ (a qual continuaremos chamando de $\mathbb{R}^n$), e escrevemos $T(u) = x$, onde $u \in U^n$ e $x \in \mathbb{R}^n$.

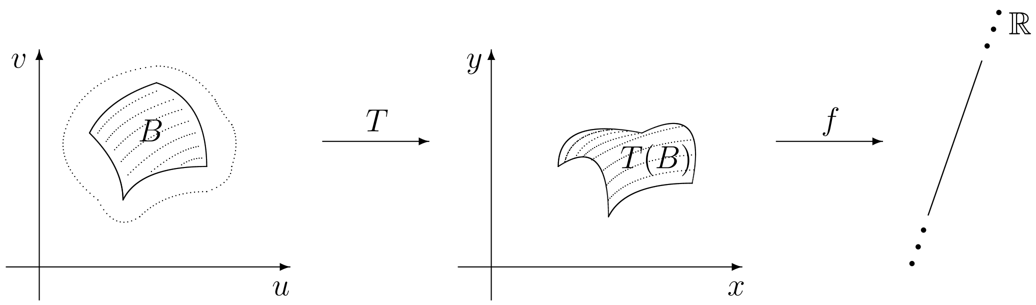
Teorema 1.3.1. (Mudança de Variáveis) *Seja $A \subset U^n \xrightarrow{T} \mathbb{R}^n$ uma transformação de classe C^1. Seja B um subconjunto limitado de U^n, tendo sua fronteira contida em um número finito de conjuntos suaves. Suponhamos que B e sua fronteira estejam contidos no interior do domínio de T e que:*

(i) T é injetora em B.

(ii) $\det J(T) \neq 0$ para todo ponto de B.

Então, se a função f é limitada e contínua sobre $T(B)$, temos:

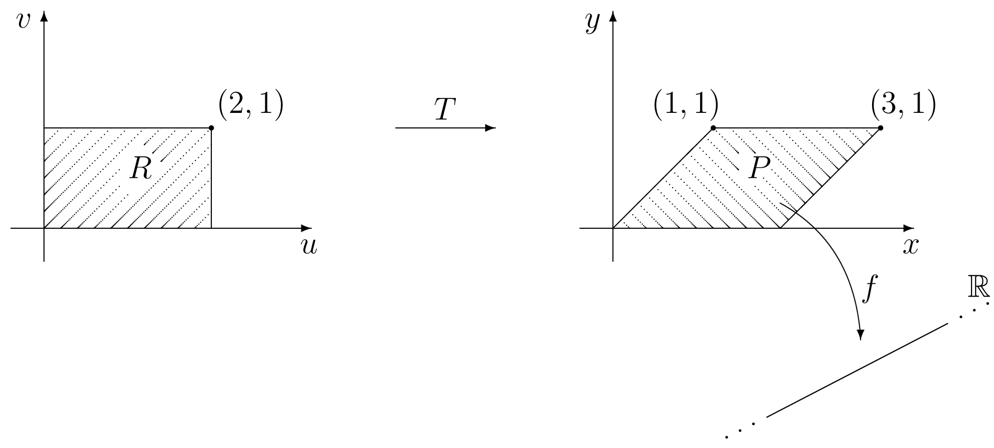
$$\int_{T(B)} f\,dv = \int_B (f \circ T) \cdot |\det J(T)|\,dv$$



Observação: O teorema ainda é verdadeiro se as condições (i) e (ii) **não** são verdadeiras em um conjunto de volume nulo.

Exemplos:

1. A integral $\displaystyle\int_P (x+y)dx\,dy$, onde P é o paralelogramo ilustrado abaixo, pode ser transformada na integral sobre um retângulo:



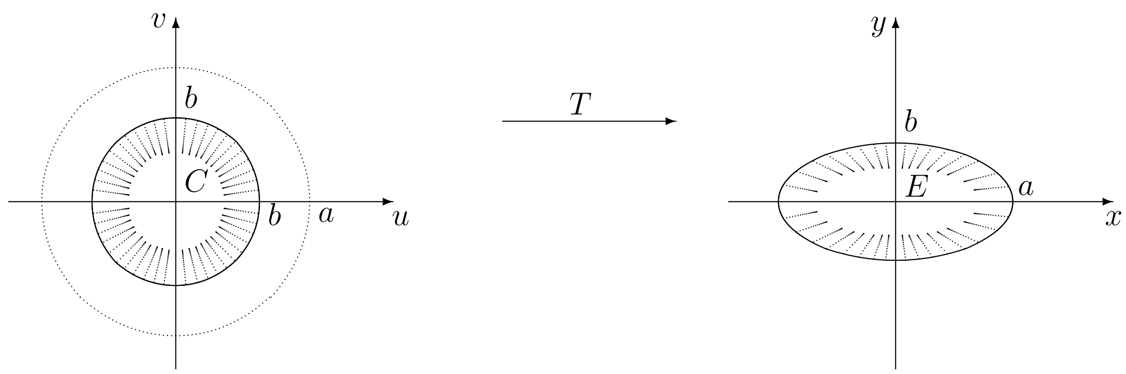
$$(x,y) = T(u,v) = (u+v\,,\,v)$$

$$\det J(T) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

T é injetora, T é de classe C^1 e $T(R) = P$.

$$\int_P (x+y)dx\,dy = \int_R [(u+v)+v]\cdot 1\,du\,dv = \int_0^2 du \int_0^1 (u+2v)dv = ... = 4$$

2. Calcular a área da região limitada pela elipse, conhecendo-se a do círculo.



$$(x,y) = T(u,v) = \left(\frac{a}{b}\,u, v\right)$$

T é injetora, T é de classe C^1 e $T(C) = E$.

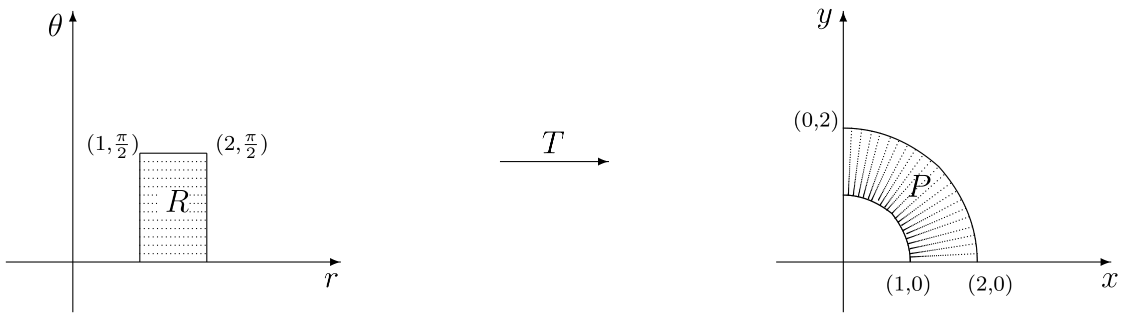
$$\det J(T) = \begin{vmatrix} a/b & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{a}{b} > 0\,.$$

Pelo Teorema de Mudança de Variáveis

$$\int_E dA = \int_C \frac{a}{b}\,dA = \frac{a}{b}\int_C dA = \frac{a}{b}\,\pi\,b^2 = \pi\,ab\,.$$

Logo, a área da região limitada pela elipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ é $\pi\, ab$.

3. Calcular a área da região P dada abaixo:



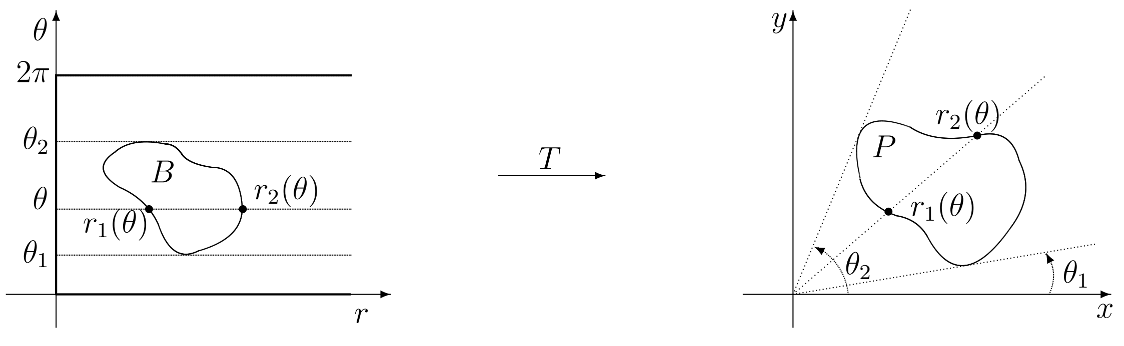
Observe que $T(r,\theta)=(r\cos\theta\,,\ r\,\mathrm{sen}\,\theta)$ transforma o retângulo R do plano $r\theta$ no setor P do plano xy.

T é de classe C^1, T é injetora

$$\det J(T)=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta\\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r$$

$$\int_P dA=\int_R 1\cdot|r|\,dA=\int_0^{\pi/2}d\theta\int_1^2 r\,dr=\int_0^{\pi/2}\frac{3}{2}\,d\theta=\frac{3\pi}{4}\ .$$

Na realidade, o exemplo anterior envolve um dos casos mais importantes de transformação de coordenadas, que é a **transformação polar**.



$(x,y)=T(r,\theta)=(r\cos\theta\,,\ r\,\mathrm{sen}\,\theta)$ onde $0\le r$ e $0\le\theta<2\pi$.

T é de classe C^1 e injetora (exceto em um conjunto de área nula)

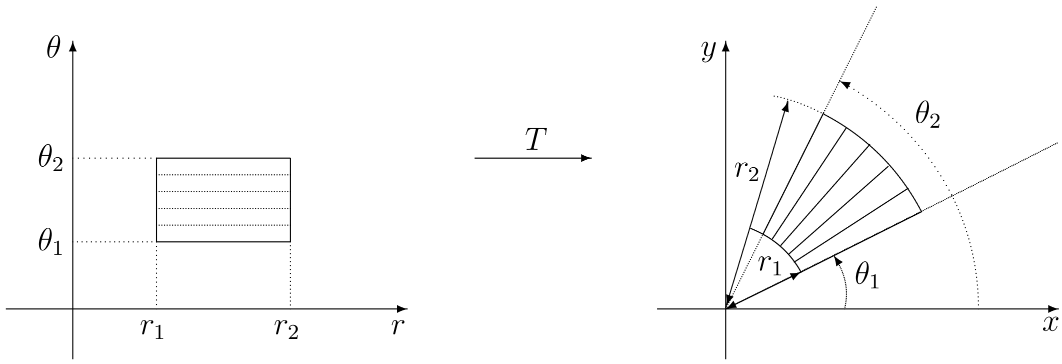
$$\det J(T) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

$\therefore$ $\det J(T)$ é não nulo, exceto em um conjunto de área nula.

A fórmula de mudança fica:

$$\int_P f(x,y)dx\,dy = \int_B f(r\cos\theta\,,\ r\,\mathrm{sen}\,\theta)r d\,r d\,\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta\,,\ r\,\mathrm{sen}\,\theta)r\,d\,r\,.$$

Observemos a seguir como a transformação polar atua:

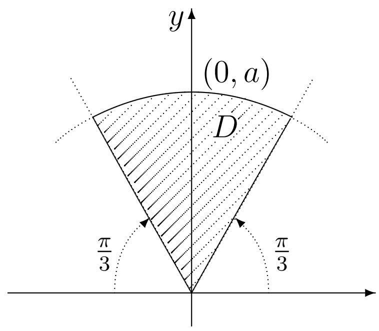


Exercícios resolvidos:

1. Determinar $\displaystyle\int_D y\,dx\,dy$, onde D é o setor circular mostrado abaixo.

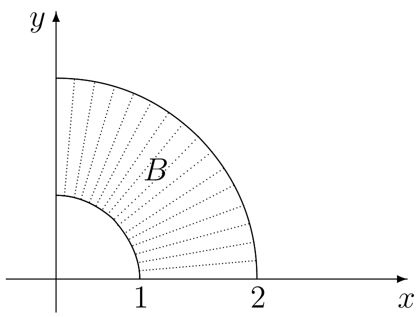
   Resolução:

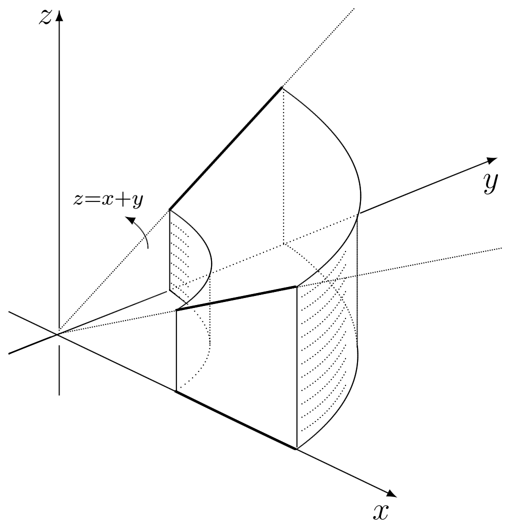
$$\int_D y\,dx\,dy = \int_{\pi/3}^{2\pi/3} d\theta \int_0^a r\,\mathrm{sen}\,\theta\, r\,d\,r \ =$$
$$= \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \frac{a^3}{3}\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\,\theta = \ \cdots\ = \frac{a^3}{3}$$



2. Calcule o volume do sólido D cuja base está no plano xy , sendo delimitada pelas curvas $x^2+y^2=1$ e $x^2+y^2=4$ $(x \geq 0\,,\ y \geq 0)$ e cuja parte superior está no plano $z = x+y$, tendo as faces laterais ortogonais ao plano xy .

   Resolução:





$$V = \int_B (x+y)dx\,dy = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_1^2 (r\cos\theta + r\,\text{sen}\,\theta) r\,d\,r = \ ... \ = \frac{14}{3}$$

3. Calcular a área de um laço da figura $r = \text{sen}\ 3\theta$.

   Resolução:

   Precisamos ter $\text{sen}\ 3\theta \geq 0$. Assim:

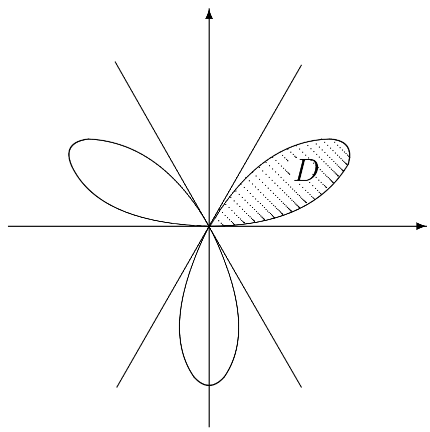
   $2k\pi \leq 3\theta \leq 2k\pi + \pi$

   $\frac{2}{3}\,k\pi \leq \theta \leq \frac{2}{3}\,k\pi + \frac{\pi}{3}$

   $k = 0 \qquad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$

   $k = 1 \qquad \frac{2\pi}{3} \leq \theta \leq \pi$

   $k = 2 \qquad \frac{4\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{3}$

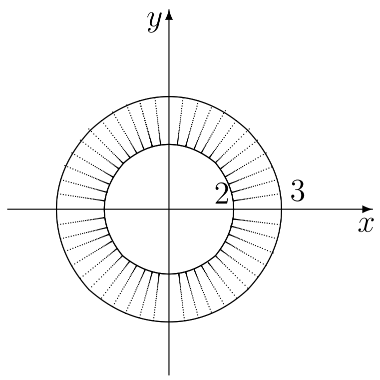


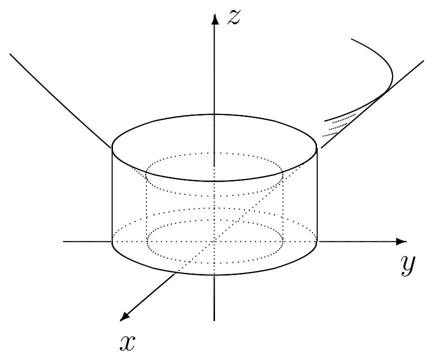
$$\int_D dx\,dy = \int_0^{\pi/3} d\theta \int_0^{\text{sen}\,3\theta} r\,d\,r = \int_0^{\pi/3} \frac{\text{sen}^2\,3\theta}{2}\ d\theta = \ \cdots \ = \frac{\pi}{12}$$

Lembrar: $\text{sen}^2\,u = \frac{1}{2}\ (1 - \cos 2u)$

4. Calcular $\int_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, onde D é o domínio do plano xy limitado por $x^2+y^2=4$ e $x^2+y^2=9$.

   Resolução:

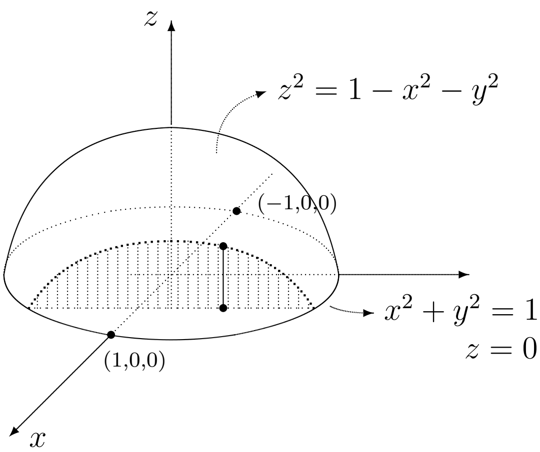




$$\int_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_2^3 r\,r\,d\,r = \int_0^{2\pi} \frac{19}{3}\,d\theta = \frac{38}{3}\,\pi$$

5. Determinar os extremos de integração onde R é o hemisfério $x^2+y^2+z^2 \le 1, \quad z \ge 0\,.$

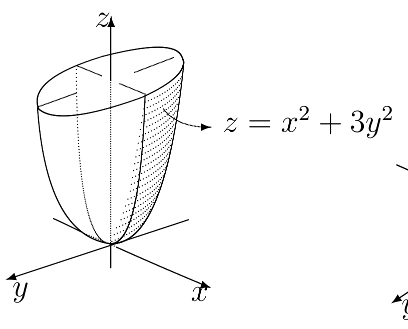
Resolução:

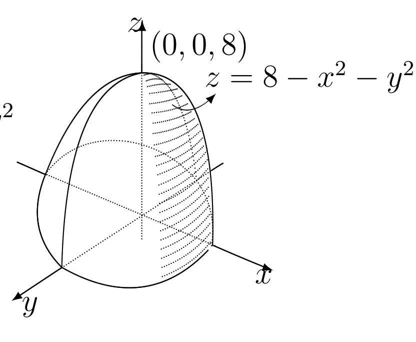


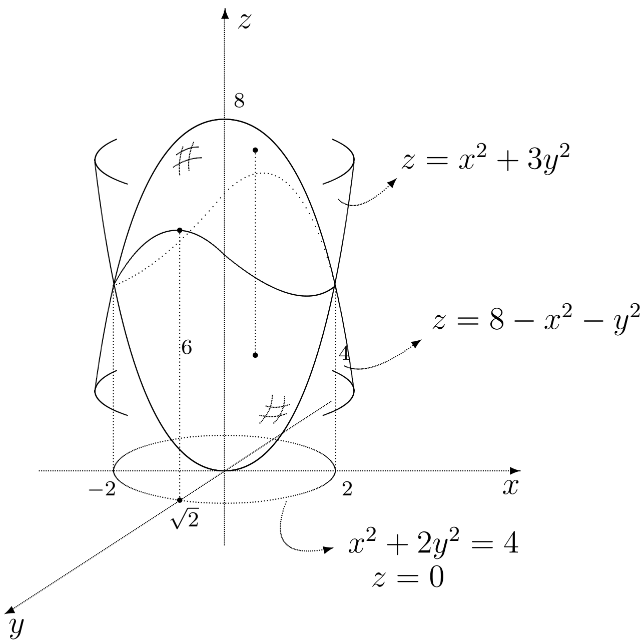
$$\int_R f(x,y,z)dv = \int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} f(x,y,z)dz$$

6. Determinar o volume compreendido entre as superfícies $z = 8 - x^2 - y^2$ e $z = x^2 + 3y^2$

Resolução:







Se um ponto (x, y, z) está na intersecção então:

$x^2 + 3y^2 = 8 - x^2 - y^2 \implies x^2 + 2y^2 = 4$

Assim a curva interseção se projeta em $x^2 + 2y^2 = 4$, $z = 0$.

$$
\begin{aligned}
V &= \int_{-2}^{2} dx \int_{-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{\sqrt{(4-x^2)/2}} dy \int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} dz = \\
&= \int_{-2}^{2} dx \int_{-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{\sqrt{(4-x^2)/2}} (8 - 2x^2 - 4y^2)\, dy = \\
&= \int_{-2}^{2} \left[2(8-2x^2)\sqrt{(4-x^2)/2} - \frac{8}{3}\left(\frac{4-x^2}{2}\right)^{3/2} \right] dx = \\
&= \int_{-2}^{2} \frac{16}{3}\left(\frac{4-x^2}{2}\right)^{3/2} dx = 4\,\frac{\sqrt{2}}{3}\int_{-2}^{2} (4-x^2)^{3/2}\, dx = \cdots = 8\pi\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

Lembre-se: você pode fazer uma substituição trigonométrica para resolver a integral.

— // — // —

Vamos agora estudar dois tipos particulares de transformações as quais são usadas muito freqüentemente.

Transformação Cilíndrica

Consideremos a transformação:

$(x, y, z) = T_c(r, \theta, z) = (r\cos\theta\,,\ r\,\mathrm{sen}\,\theta\,,\ z)$

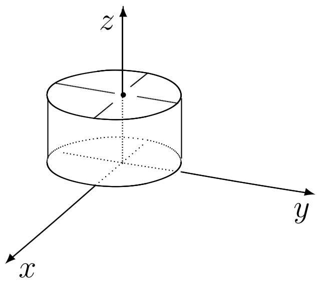
$$\det J(T_c) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta & 0 \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

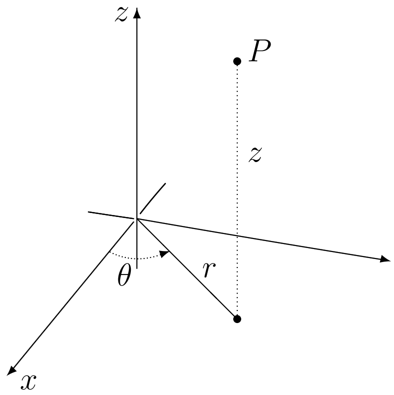
Notemos que:

(i) T_c é de classe C^1.

(ii)T_c é injetora (exceto em conjunto de volume nulo - $r = 0$).

(iii) $\det JT_c) \neq 0$ (exceto em conjunto de volume nulo - $r = 0$)





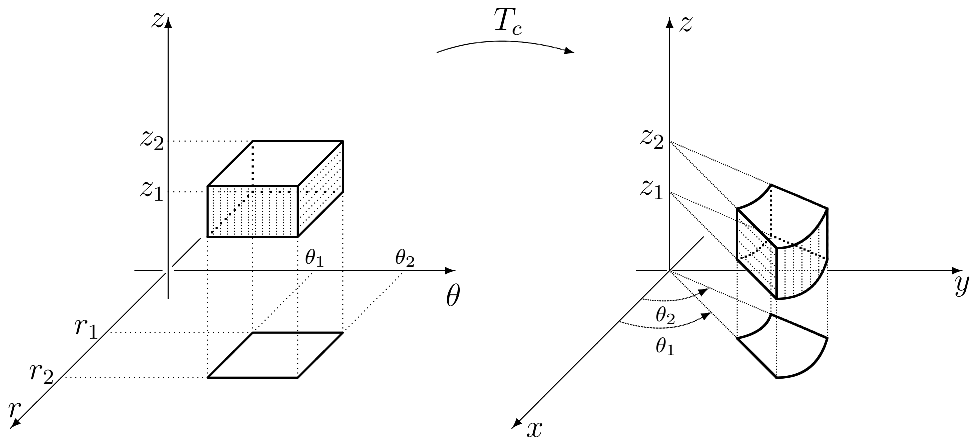
Exemplo:

Calcular $\displaystyle\int_R f(x, y, z)dv$, onde $f(x, y, z) = 4xy$ e R é a região cilíndrica $x^2 + y^2 \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$.

$$\int_R 4xydv \ = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_0^1 4r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\, r\, d\, z \ =$$

$$= \ \int_0^{2\pi} \mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\, d\,\theta \ \underset{\overline{\phantom{u = \mathrm{sen}\,\theta}}}{\overline{u = \mathrm{sen}\,\theta}} \ \frac{\mathrm{sen}^2\theta}{2}\Bigg|_0^{2\pi} = 0$$

A figura geral a seguir informa qual é o efeito provocado pela atuação da transformação cilíndrica:



A segunda transformação a merecer um destaque especial seria a

Transformação Esférica

Consideremos a transformação:

$$(x, y, z) = T_e(\rho, \psi, \theta) = (\rho \operatorname{sen} \psi \cos \theta\, ,\ \rho \operatorname{sen} \psi\ \operatorname{sen} \theta\, ,\ \rho \cos \psi)$$

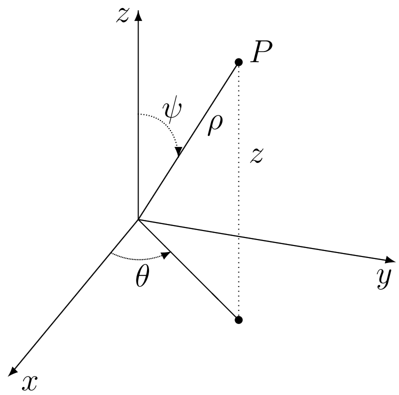
$$\det J(T_e) = \begin{vmatrix} \operatorname{sen} \psi \cos \theta & \rho \cos \psi \cos \theta & -\rho \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \psi\ \operatorname{sen}\theta & \rho \cos \psi\ \operatorname{sen} \theta & \rho \operatorname{sen} \psi \cos \theta \\ \cos \psi & -\rho \operatorname{sen} \psi & 0 \end{vmatrix} = \cdots = \rho^2 \operatorname{sen} \psi$$

Notemos que:

(i) T_e é de classe C^1.

(ii)T_e é injetora (exceto em conjunto de volume nulo - $\rho = 0$).

(iii) $\det JT_e) \neq 0$ (exceto em conjunto de volume nulo- $\rho = 0$ ou $\psi = 0$ ou $\psi = \pi$)



Exemplo 1:

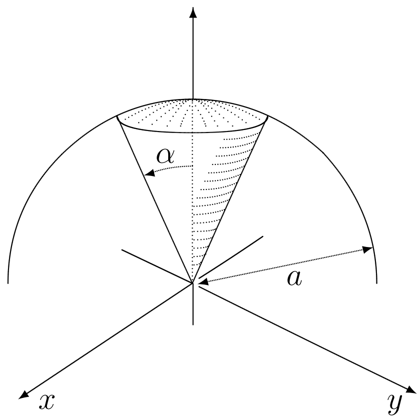
Calcular $\displaystyle\int_B f(x,y,z)dv$, onde $f(x,y,z) = z^2$ e B é a região $x^2+y^2+z^2 \leq 1$.

$$\int_B z^2 dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\psi \int_0^1 \rho^2\cos^2\psi\rho^2 \operatorname{sen}\psi\, d\rho = \cdots = \frac{4\pi}{15}$$

Exemplo 2:

Calcular o volume comum à esfera $\rho = a$ e ao cone $\psi = \alpha$ (Veja figura a seguir)

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\alpha} d\psi \int_0^a \rho^2 \operatorname{sen}\psi\, d\rho = \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\alpha} \operatorname{sen}\psi\, d\psi = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{a^3}{3}(1-\cos\alpha)d\theta = \\ &= 2\pi\frac{a^3}{3}(1-\cos\alpha). \end{aligned}$$

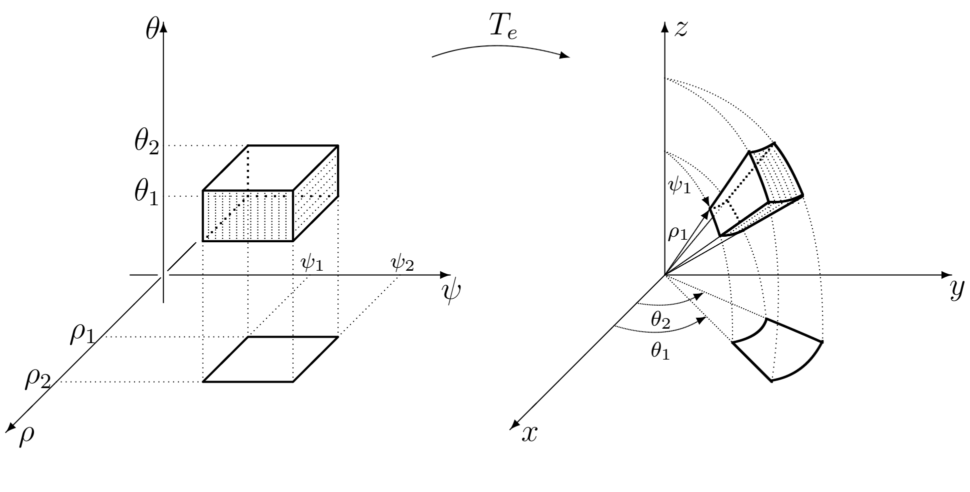


Observemos os casos particulares:

$\alpha = \dfrac{\pi}{2} \to$ hemisfério $\qquad V = 2\pi\dfrac{a^3}{3}$

$\alpha = \pi \to$ esfera $\qquad V = \dfrac{4}{3}\pi a^3$

A figura geral a seguir informa qual é o efeito provocado pela atuação da transformação esférica:



Exercícios propostos 1.3

1. Calcule a área da imagem da região retangular com vértices $(0,0)$, $(0,1)$, $(2,0)$ e $(2,1)$, sob a transformação

$$(x,y) \;=\; T(u,v) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

2. Seja $(x,y) = T(r,\theta) = (r\cos\theta\ ,\ r\text{sen}\,\theta)$.

   (a) Desenhe a imagem, sob T, da região quadrada de vértices $(0,0)$, $\left(0\,,\,\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ e $\left(\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right)$.

   (b) Qual é a área da região desenhada em (a) ?

3. Prove que a transformação $T : U^3 \to R^3$ dada por $(x,y,z) = T(u,v,w) = (u\,,\,u+v\,,\,u+v+w)$, não altera o volume de regiões correspondentes.

4. Ache o volume do sólido V limitado pelo parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ e pelo plano xy.

   Sugestão: Coordenada polar.

5. Calcule:

   (a) O volume da região abaixo do plano $z = 2 + x + y$ para $x^2 + y^2 \leq 1$.

   (b) O volume do cone sólido acima da superfície $z = \dfrac{h}{a}\sqrt{x^2+y^2}$ e abaixo do plano $z = h$; para $h\,,\ a > 0$.

6. Avaliar com a ajuda de coordenadas polares:

   (a) $\displaystyle\int_R \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$ $\qquad$ $R : x^2 + y^2 \leq 4$

   (b) $\displaystyle\int_R xy\,dx\,dy$ $\qquad$ $R : \begin{cases} 0 \leq y \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y \leq x \leq \sqrt{1-y^2} \end{cases}$

   (c) $\displaystyle\int_R r^2\cos\theta\,dr\,d\theta$ $\qquad$ $R : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 1 \leq r \leq 1 + \text{sen}\,\theta \end{cases}$

7. Avaliar com a ajuda de coordenadas cilíndricas:

   (a) $\displaystyle\int_R xy\,dx\,dy\,dz$ $\qquad$ $\mathrm{R}: x^2 + y^2 \leq 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad 0 \leq z \leq 1$

   (b) $\displaystyle\int_R r^2\,dr\,d\theta\,dz$ $\qquad$ $\mathrm{R}: \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq z \leq r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$

8. Avaliar com a ajuda de coordenadas esféricas:

   (a) $\displaystyle\int_R (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} dx\,dy\,dz$ $\qquad$ $\mathrm{R}: x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$

   (b) $\displaystyle\int_R \rho\cos(\psi + \theta) d\rho\,d\psi\,d\theta$ $\qquad$ $\mathrm{R}: \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \leq \psi \leq \theta \end{cases}$

9. Seja a transformação $T(u, v) = (u + v\,,\, u^2 - v) = (x, y)$. Considere R a região limitada pelo eixo u, pelo eixo v e pela reta $u + v = 2$.

   (a) Desenhe $T(R)$.

   (b) Calcule $\displaystyle\int_{T(R)} \frac{1}{\sqrt{1 + 4x + 4y}}\,dx\,dy$

10. Seja a transformação do plano xy no plano uv dada por:

$$(u, v) = T(x, y) = (x, y(1 + 2x))$$

   (a) O que acontece com as retas horizontais do plano xy?

   (b) Se R é a região retangular $0 \leq x \leq 3,\ 1 \leq y \leq 3$ ache $T(R) = D$.

   (c) Calcule $\displaystyle\int_D du\,dv$ diretamente e depois usando mudança de variáveis.

11. Faz-se um orifício circular em uma esfera, sendo que o eixo do orifício coincide com o diâmetro da esfera. O volume do sólido resultante é dado por:

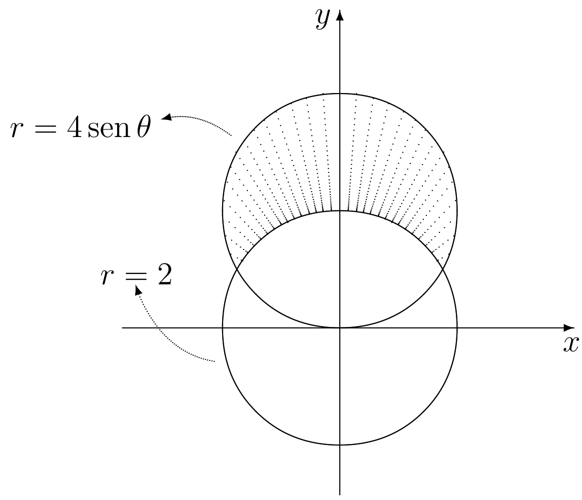
$$V = 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 dr \int_0^{\sqrt{4-r^2}} r\,dz\,.$$

(a) Por observação da integral acima determine o raio do orifício e o raio da esfera.

(b) Calcule o valor da integral.

12. Ache o volume de uma cunha formada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e pelos planos $z = 0$ e $z = 2y$, no semi-espaço $z \geq 0$.

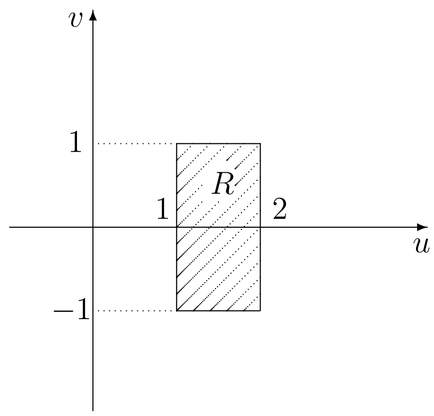
13. Calcule $\displaystyle\int_B \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy$ onde B é a região hachurada abaixo:



14. Considere a transformação $T(u,v) = (u^2 - v^2\,,\, 2uv) = (x,y)$.

(a) Qual é a imagem, por T, da região mostrada a seguir.

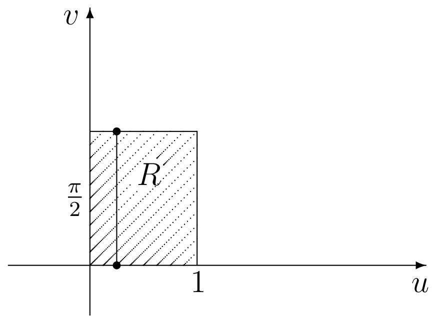
(b) Calcular $\displaystyle\int_{T(R)} x\, dx\, dy$



15. Considere a transformação $T(u,v) = (e^u \cos v\,,\, e^u \operatorname{sen} v) = (x,y)$.

(a) Qual é a imagem, por T, da região mostrada a seguir.

(b) Calcular a área da região $T(R)$.



16. Calcular o volume compreendido entre as superfícies $z = x^2 + y^2$ e $z = 8 - x^2 - y^2$.

17. Calcular o volume do sólido delimitado por $z = e^{y^2}$, $z = 0$, $x = 0$, $y = 3$ e $3x = y$.

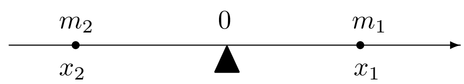
1.4 Algumas Aplicações

Já usamos as integrais múltiplas para calcular áreas de figuras planas e volumes de sólidos. Vejamos agora outras aplicações.

1.4.1 Densidade - Centro de Massa

<u>Introdução:</u>

Consideremos ℓ uma reta coordenada e P um ponto sobre ℓ, de coordenada x. Se uma partícula de massa m é colocada em P, então o momento da partícula em relação à origem O é definido como o produto mx. Consideremos uma *"balança"* do tipo desenhado abaixo, onde duas partículas de massas m_1 e m_2 estão localizadas em pontos com coordenadas x_1 e x_2, respectivamente, sendo $x_1 > 0$ e $x_2 < 0$. Então o sistema é dito em equilíbrio se $m_1x_1 = m_2|x_2|$, ou seja, $m_1x_1 = -m_2x_2$, ou ainda, $m_1x_1 + m_2x_2 = 0$, isto é, a soma dos momentos em relação à origem é zero.



Em geral:

Se n partículas de massas $m_1, \dots, m_n$ estão localizadas em pontos de ℓ com coordenadas $x_1, \dots, x_n$, respectivamente, então a soma dos momentos $\sum_{i=1}^{n} m_i\, x_i$ é chamada o momento do sistema em relação à origem.

Seja $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ a massa total dos sistema. Definimos:

$$(*) \qquad \overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\, x_i}{m} \qquad \text{ou} \qquad m\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} m_i\, x_i$$

O número $m\overline{x}$ é o momento, em relação à origem, de uma partícula de massa m localizada no ponto de coordenada $\overline{x}$. A fórmula $(*)$ dá a posição $\overline{x}$ na qual toda a massa m pode ser concentrada sem trocar o momento do sistema em relação à origem. O ponto P com coordenada $\overline{x}$ é chamado o centro de massa do sistema.

Se $\overline{x} = 0$, então $\sum_i m_i\, x_i = 0$ e o sistema é dito em equilíbrio. Neste caso, a origem é o centro de massa.

O conceito anterior pode ser estendido para dimensão 2, como segue:

Sejam n partículas de massas $m_1, \dots, m_n$, localizadas em pontos $P_1 = (x_1, y_1), \dots, P_n = (x_n, y_n)$, respectivamente, sobre um plano coordenado. Os momentos M_x e M_y do sistema em relação aos eixos x e y, respectivamente, são definidos por:

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} m_i\, y_i \qquad M_y = \sum_{i=1}^{n} m_i\, x_i$$

Se m denota a massa total do sistema ($m = \sum_i m_i$), então o centro de massa do sistema é o ponto $P = (\overline{x},\ \overline{y})$, dado por:

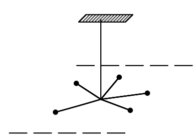
$$(**) \qquad m\overline{x} = M_y \quad \text{e} \quad m\overline{y} = M_x$$

Observe que se tivermos uma partícula de massa m localizada no ponto $P = (\overline{x},\ \overline{y})$, então o momento em relação ao eixo y será $m\overline{x}$ e o momento em relação ao eixo x será $m\overline{y}$.

A fórmula $(**)$ dá a posição $(\overline{x},\ \overline{y})$, na qual toda massa pode ser concentrada sem trocar os momentos do sistema em relação aos eixos coordenados.

Se $(\overline{x},\ \overline{y}) = (0, 0)$, então $M_x = M_y = 0$ e o sistema é dito em equilíbrio. Neste caso a origem coincide com o centro de massa. O centro de massa é o ponto pelo qual poderíamos pendurar o sistema de modo que ele fique em equilíbrio na horizontal.

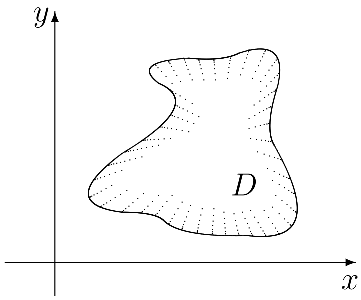
Visualização: Suponhamos que num plano temos 5 partículas constituindo um "mobile" do tipo da figura a seguir. Se quisermos através de um fio, prender este "mobile" ao teto, de maneira que o plano das partículas fique na posição horizontal, deveremos prender o fio no centro de massa do sistema.



— o — o — o — o — o — o — o — o —

Consideremos agora uma lâmina L com a forma da região D ao lado.

Suponhamos que a densidade no ponto (x, y) seja dada por $\rho(x, y)$, onde ρ é contínua sobre D.



Tomemos G uma rede cobrindo D. Escolhemos pontos (x_i, y_i) nos retângulos coordenados R_i. Chamaremos de L_i a parte de L que corresponde a R_i. Desde que ρ seja contínua, uma pequena troca em (x, y) produz uma pequena troca na densidade $\rho(x, y)$, isto é, ρ é quase constante sobre R_i, quando $m(G) \to 0$. Assim, se $m(G) \to 0$, então a massa de L_i pode ser aproximada por $\rho(x_i, y_i) \cdot A(R_i)$. A soma $\sum_i \rho(x_i, y_i) \cdot A(R_i)$ é uma aproximação da massa de L. A massa M de L é definida como:

$$M = \lim_{m(G)\to 0} \sum_i \rho(x_i, y_i) A(R_i) = \int_D \rho(x, y) dA$$

Em particular, se a distribuição de massa M for homogênea, isto é, $\rho(x, y) = c$, então:

$$M = c \int_D dA = c \cdot (\text{área de } D)$$

Ainda: a densidade média da lâmina L é

$$\overline{\rho} = \frac{\text{massa}}{\acute{a}rea} = \frac{\displaystyle\int_D \rho(x, y) dA}{\displaystyle\int_D dA}$$

Se a massa de L_i é suposta concentrada em (x_i, y_i) então o momento de L_i em relação ao eixo x é $y_i\, \rho(x_i, y_i) A(R_i)$. O momento M_x de L em relação ao eixo x é definido como o limite de tais somas, isto é:

$$(**) \qquad M_x = \lim_{m(G)\to 0} \sum_i y_i \cdot \rho(x_i, y_i) \cdot A(R_i) = \int_D y \cdot \rho(x, y) dA$$

Analogamente:

$$M_y = \lim_{m(G)\to 0} \sum_i x_i \cdot \rho(x_i, y_i) \cdot A(R_i) = \int_D x \cdot \rho(x, y) dA$$

Ainda, o centro de massa da lâmina L é o ponto $(\overline{x},\ \overline{y})$, tal que:

$$\overline{x} = \frac{M_y}{M} \qquad e \qquad \overline{y} = \frac{M_x}{M}$$

Substituindo, temos:

$$\overline{x} = \frac{\displaystyle\int_D x \cdot \rho(x,y) dA}{\displaystyle\int_D \rho(x,y) dA} \qquad \text{e} \qquad \overline{y} = \frac{\displaystyle\int_D y \cdot \rho(x,y) dA}{\displaystyle\int_D \rho(x,y) dA}$$

No caso particular em que a densidade $\rho(x,y)$ é constante, as expressões acima se reduzem a:

$$\overline{x} = \frac{\displaystyle\int_D x\, dA}{\displaystyle\int_D dA} \qquad \text{e} \qquad \overline{y} = \frac{\displaystyle\int_D y\, dA}{\displaystyle\int_D dA}$$

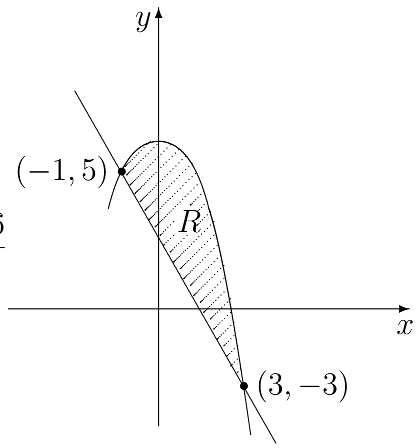
Neste caso , o centro de massa é denominado centróide. Observe que independe do valor $c = \rho(x,y)$. Deste modo, ele pode ser pensado como um conceito geométrico associado unicamente à forma da região A , independendo da distribuição de massa.

Exercícios resolvidos:

1. Ache o centróide de uma lâmina que ocupa a região D, delimitada pelos gráficos de $y + x^2 = 6$ e $y + 2x - 3 = 0$.

   Resolução:

   $$A(R) = \int_{-1}^{3} ((6 - x^2) - (3 - 2x))dx = \cdots = \frac{32}{3}$$



   $$\begin{aligned}\int_D y\, dA &= \int_{-1}^{3} dx \int_{3-2x}^{6-x^2} y\, dy = \\ &= \int_{-1}^{3} ((6-x^2)^2 - (3-2x)^2)dx = \cdots = \frac{416}{15}\end{aligned}$$

   Logo, $\overline{y} = \dfrac{416/15}{32/3} = \dfrac{13}{5}$

   $$\int_D x\, dA = \int_{-1}^{3} dx \int_{3-2x}^{6-x^2} x\, dy = \int_{-1}^{3} x\left[(6-x^2) - (3-2x))\right] dx = \cdots = \frac{32}{3}$$

   Assim $\overline{x} = \dfrac{32/3}{32/3} = 1$

   $\therefore$ Centro de Massa é $\left(1\,, \dfrac{13}{5}\right)$.

2. Determine o centróide de uma lâmina que ocupa a região R do semicírculo $x^2 + y^2 \leq 1, \ y \geq 0$.

   Resolução:

   Por simetria sabemos que o centróide está situado sobre o eixo y, ou seja é da forma $C = (0, \ \overline{y})$.

   Sabemos também que $A(R) = \dfrac{\pi}{2}$

$$\int_R y\, dA = \int_0^{\pi} \int_0^1 (r\text{sen } \theta) r dr d\theta = (-\cos\theta) \Big|_0^{\pi} . (\frac{r^3}{3}) \Big|_0^1 = (1+1) . \frac{1}{3} \ = \ \frac{2}{3}.$$

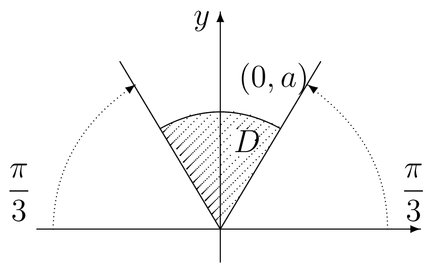
   Assim temos: $\quad \overline{y} = \dfrac{\displaystyle\int_D y\, dA}{\displaystyle\int_D dA} = \dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{4}{3\pi}$

   Logo, o centro de massa é o ponto $\left(0 \ , \ \dfrac{4}{3\pi}\right)$

Exercício proposto:

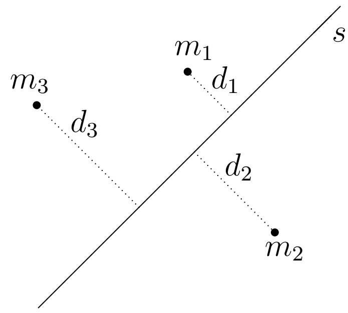
Determine o centro de massa de uma lâmina com a forma do setor circular abaixo, sendo que a densidade é $\rho(x, y) = 5$.

Resposta: $\left(0\, ,\, \dfrac{2a}{\pi}\right)$.



1.4.2 Momento de Inércia

Suponhamos dadas uma reta s e massas $m_1, m_2, \ldots, m_n$ localizadas nos pontos $P_1, \ldots, P_n$, no plano $\mathbb{R}^2$. Denotemos por $d_1, \ldots, d_n$ as distâncias desses pontos à reta s. Ao número real $I_s = \sum_{i=1}^{n} m_i\, d_i^2$ costumamos chamar de momento de inércia do sistema em relação à reta s.



Em particular, se a reta s é o eixo dos x, temos $I_x = \sum_{i=1}^{n} m_i\, y_i^2$, onde $P_i = (x_i, y_i)$. Analogamente $I_y = \sum_{i=1}^{n} m_i\, x_i^2$.

Este conceito pode ser estendido para lâminas usando o processo limite das integrais duplas. Se L é uma lâmina do tipo usado na seção anterior e se $\rho(x,y)$ é a densidade em (x,y), onde ρ é contínua , então é natural definir o momento de inércia I_x de L com relação ao eixo x trocando y_i por y_i^2 em $(**)$. Assim,

$$I_x = \lim_{m(G)\to 0} \sum_i y_i^2 \cdot \rho(x_i, y_i) \cdot A(R_i) = \int_D y^2 \cdot \rho(x,y)dA$$

Analogamente,

$$I_y = \lim_{m(G)\to 0} \sum_i x_i^2 \cdot \rho(x_i, y_i) \cdot A(R_i) = \int_D x^2 \cdot \rho(x,y)dA$$

Se multiplicarmos $\rho(x_i, y_i) \cdot A(R_i)$ por $x_i^2 + y_i^2$ que é o quadrado da distância do ponto (x_i, y_i) à origem e tomarmos o limite de somas constituidos por tais termos, obtemos o momento de inércia I_0 de L com relação à origem. Assim,

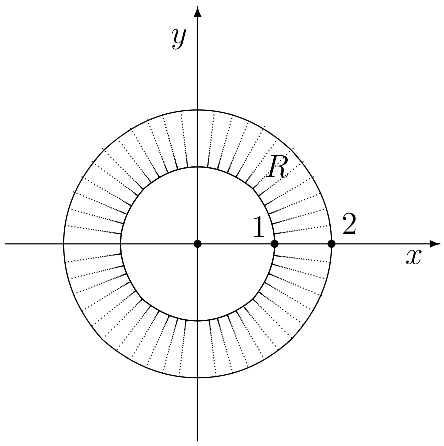
$$I_0 = \int_D (x^2 + y^2)\rho(x,y)dA$$

I_0 é também chamado momento de inércia polar da lâmina L em relação à origem. Observe que $I_0 = I_x + I_y$.

Exemplo:

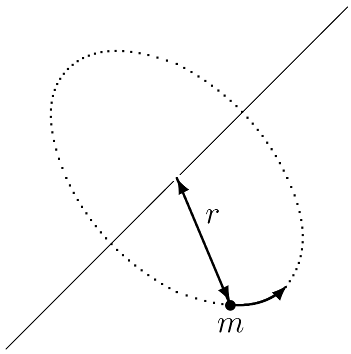
Uma lâmina delgada de densidade constante ocupa a região mostrada abaixo. Calcule o seu momento de inércia polar em relação a 0.

$$
\begin{aligned}
I_0 &= \int_R (x^2+y^2)\rho\, dA = \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 r^2 \rho r\, dr = \rho \int_0^{2\pi} \frac{r^4}{4}\Big|_1^2 d\theta = \\
&= \rho \int_0^2 \frac{15}{4}\, d\theta = \rho \cdot \frac{15\pi}{2}\ .
\end{aligned}
$$



Observação: Quando uma partícula de massa m gira ao redor de um eixo, num círculo de raio r, com velocidade angular w e velocidade $v(v = wr)$, sua energia cinética é:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mw^2r^2$$



Se um sistema de partículas de massas $m_1, \ldots, m_n$ gira em torno do mesmo eixo com a mesma velocidade angular, w, as distâncias ao eixo sendo $r_1, \ldots, r_n$, respectivamente, então a energia do sistema é

$$E_c = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\, w^2 \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = \frac{1}{2}w^2 I\ ,$$

onde $I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$ é o momento de inércia em relação ao eixo.

A energia cinética de um sistema em rotação é a quantidade de trabalho necessária para fazer o sistema parar. Em certo sentido, o momento de inércia de um grande eixo é que torna difícil iniciar ou fazer cessar a rotação do eixo.

Além de sua importância em relação à energia cinética dos corpos com movimento giratório, o momento de inércia é também usado na teoria de deflexão de vigas sob a ação de carga transversa, onde o "fator de rigidez"da viga é dado por $E.I$, sendo E o módulo de

Young e I o momento de inércia de uma secção transversa da viga em relação a um eixo horizontal passando por seu centro de massa. Quanto maior for o valor de I, mais rígida será a viga e menor a deflexão. Utiliza-se este fato nas chamadas "vigas em I", nas quais as flanges acham-se a distâncias relativamente grandes do centro, e correspondem, portanto, a grandes valores de r^2 na equação $I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$, contribuindo assim para o momento de inércia, mais do que no caso de a secção transversa ser quadrada.

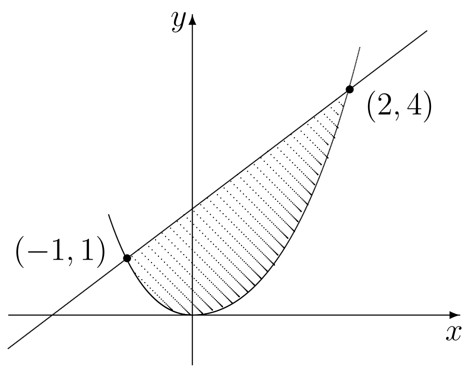
Os momentos também são usados em estatística. O segundo momento (que corresponde ao momento de inércia) é usado no cálculo do desvio padrão.

Exercícios resolvidos:

1. Uma chapa delgada, de espessura e densidade uniformes cobre a região do plano xy situada entre $y = x^2$ e $y = x + 2$. Calcular seu momento de inércia em relação ao eixo y.

   Resolução:

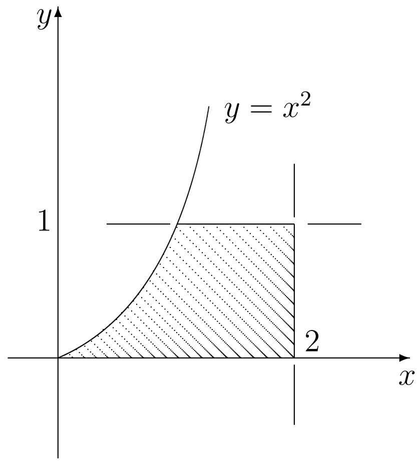
$$\begin{aligned} I_y &= \int_{-1}^{2} dx \int_{x^2}^{x+2} x^2 \cdot \delta \, dy = \\ &= \delta \int_{-1}^{2} x^2 y \Big|_{x^2}^{x+2} dx = \\ &= \delta \int_{-1}^{2} (x^3 + 2x^2 - x^4) dx = \frac{63}{20}\, \delta \end{aligned}$$



2. Determinar o centro de massa de uma placa delgada, de espessura e densidade uniformes, que está sobre a região do plano xy limitada pelas retas $y = 1$, $x = 2$ e $y = 0$ e pela parábola $y = x^2$.

   Resolução:

$$\overline{x} = \frac{\displaystyle\int_A x\rho\, dA}{\displaystyle\int_A \rho\, dA} = \frac{\displaystyle\int_A x\, dA}{\displaystyle\int_A dA}$$



$$\int_A dA = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^2 dx = \cdots = \frac{4}{3}$$

$$\int_A x\, dA = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^2 x\, dx = \cdots = \frac{7}{4}$$

$$\therefore \quad \overline{x} = \frac{21}{16}\,.$$

Analogamente, $\overline{y} = \dfrac{9}{20}$

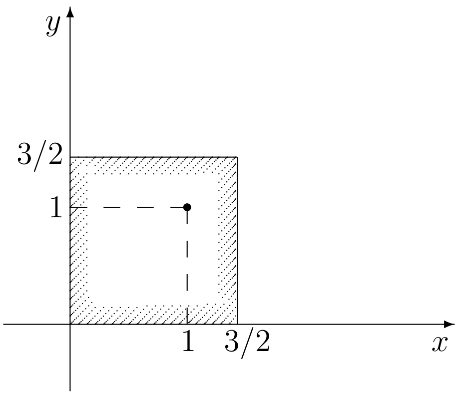
$\therefore$ Centro de gravidade: $\left(\dfrac{21}{16}\,,\,\dfrac{9}{20}\right)$.

3. Ache o centro de massa de uma lâmina quadrada $ABCD$, de lado $\dfrac{3}{2}$, sabendo que a densidade em qualquer ponto P é o produto das distâncias de P a AB e a BC.

   Resolução:

   Escolhemos um sistema de coordenadas como na figura. Temos que $\rho(x,y) = xy$

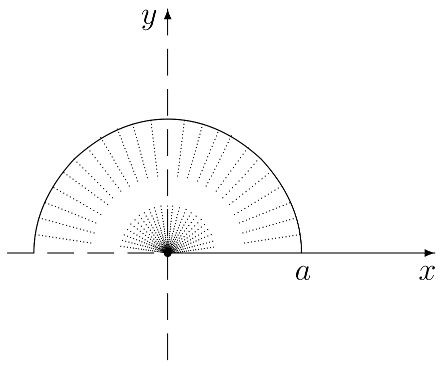
$$\begin{aligned} M &= \int_0^{3/2} dy \int_0^{3/2} xy\, dx = \cdots = \frac{81}{64} \\ M_x &= \int_0^{3/2} dy \int_0^{3/2} xy^2\, dx = \cdots = \frac{81}{64} \\ M_y &= \int_0^{3/2} dy \int_0^{3/2} x^2 y\, dx = \cdots = \frac{81}{64} \end{aligned}$$



   Assim, $(\overline{x},\ \overline{y}) = (1,1)$ é o centro de massa.

4. Ache o centro de massa de uma lâmina semicircular, sendo a densidade da lâmina em

qualquer ponto P proporcional à distância entre P e o centro do círculo.



Resolução:

Escolhemos um sistema de coordenadas polares, com o semicírculo tendo equação

$r = a \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$

Temos $\rho(r, \theta) = kr$, para alguma constante k .

$$
\begin{aligned}
M &= \int_0^{\pi} d\theta \int_0^a (kr) r \, dr = \frac{k \cdot a^3}{3} \int_0^{\pi} d\theta = \frac{\pi k \cdot a^3}{3} \\
M_x &= \int_0^{\pi} d\theta \int_0^a (kr) \cdot r \operatorname{sen} \theta \cdot r \, dr = \frac{k \cdot a^4}{4} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta \, d\theta = \frac{k \cdot a^4}{2}
\end{aligned}
$$

Por simetria, temos que o centro de massa encontra-se sobre o raio $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, ou seja, $M_y = 0$.

Logo, $(\overline{x}, \ \overline{y}) = \left(0 \, , \, \dfrac{3a}{2\pi}\right)$ ou em coordenadas polares $\left(\dfrac{3a}{2\pi} \, , \, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

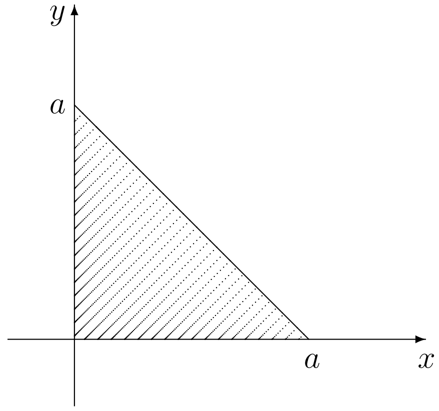
Exercícios propostos:

1. Uma lâmina tem a forma de um triângulo retângulo isósceles, cujos lados iguais medem a . Ache o centro de massa, sabendo que a densidade num ponto P é diretamente proporcional ao quadrado da distância de P ao vértice oposto à hipotenusa.

Resposta: na situação ao lado

o centro de massa é

$\left(\dfrac{2a}{5} \, , \, \dfrac{2a}{5}\right)$.



2. Calcular o momento de inércia, em relação ao eixo x, de uma lâmina situada entre as curvas $x = y^2$ e $x = 2y - y^2$, sendo que a densidade em (x, y) é $\rho(x, y) = y + 1$.

   Resposta: $\dfrac{1}{6}$

—— / / —— / / ——

Tudo o que foi visto nas seções anteriores generaliza-se para sólidos, usando-se integrais triplas.

Se um sólido tem o formato de uma certa região 3-dimensional Q e se a densidade no ponto (x, y, z) é $\rho(x, y, z)$, então analogamente ao visto anteriormente, a massa é dada por:

$$M = \int_Q \rho(x, y, z) dv\,.$$

Se temos uma partícula de massa m num ponto (x, y, z), então seus momentos com relação aos planos xy, xz e yz são definidos como zm, ym e xm, respectivamente. Usando os mesmos tipos de argumentos utilizados anteriormente definimos os **momentos** do sólido em relação aos planos coordenados como sendo:

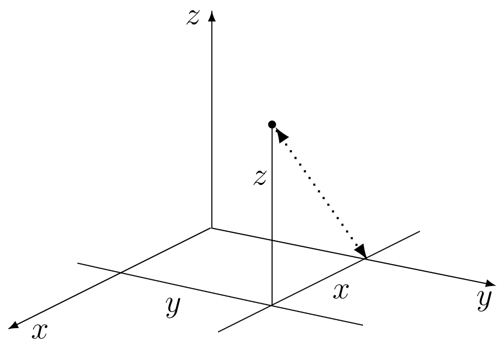
$$\begin{aligned} M_{xy} &= \int_Q z \cdot \rho(x, y, z) dv \\ M_{yz} &= \int_Q x \cdot \rho(x, y, z) dv \\ M_{xz} &= \int_Q y \cdot \rho(x, y, z) dv \end{aligned}$$

O **centro de massa** é o ponto $(\overline{x},\ \overline{y},\ \overline{z})$, onde

$$\overline{x} = \frac{M_{yz}}{M} \qquad \overline{y} = \frac{M_{xz}}{M} \qquad \overline{z} = \frac{M_{xz}}{M}$$

Quando $\rho(x, y, z) \equiv C$, então o centro de massa é chamado **centróide**. Observemos que ele independe do valor de $\rho(x, y, z)$.

Se uma partícula de massa m está no ponto (x, y, z), então seu momento de inércia em relação ao eixo y é $(x^2 + z^2)m$.



Novamente aqui somos levados a definir

$$I_y = \int_Q (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)dv$$

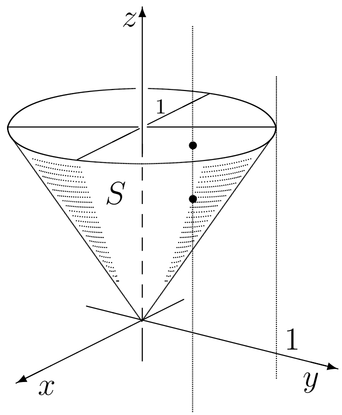
Analogamente, temos:

$$\begin{aligned} I_x &= \int_Q (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)dv \\ I_z &= \int_Q (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)dv \end{aligned}$$

Exemplo:

Considere o sólido com o formato dado abaixo. Ache o seu centro de massa e o momento de inércia em relação ao eixo z. $\quad (\rho(x, y, z) = 1)$.

$$\begin{aligned} M &= \int_S 1dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_r^1 rdz = \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r(1-r)dr = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) d\theta = \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} M_{xy} &= \int_S zdv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_r^1 zrdz = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (r - r^3)dr = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1}{4}\, d\theta = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot 2\pi = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Logo, $\overline{z} = \dfrac{\pi/4}{\pi/3} = \dfrac{3}{4}$.

Por simetria $\overline{x} = \overline{y} = 0$

$\therefore$ centro de massa: $\left(0,\ 0,\ \dfrac{3}{4}\right)$.

$$\begin{aligned} I_z &= \int_S (x^2+y^2)dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_r^1 r^2 \cdot r dz = \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3(1-r)dr = \int_0^{2\pi} \frac{1}{20}\, d\theta = \frac{\pi}{10} \end{aligned}$$

Exercícios propostos:

1. Encontrar o centro de massa da pirâmide homogênea de base delimitada pelas retas $x = 1$, $x = -1$, $y = 1$, $y = -1$ no plano $z = 0$, e cujo vértice é o ponto $(0, 0, 1)$.
   Resposta: $(\ 0,\ 0,\ \frac{1}{4}\ )$.

2. Use coordenadas cilíndricas para determinar o momento de inércia de uma esfera de raio a e massa M, em relação a um diâmetro. Resposta: $\frac{2}{5}Ma^2$.

3. Calcule $\int\int\int_B x^2y^2z\ dV$, onde B é a bola de raio a e centro na origem do R^3.
   Sugestão: Você pode calcular de uma maneira indireta. Resposta: 0

4. Está claro que se B é a bola de raio 1 e centro na origem então
$$\int\int\int_B [3 + (x^2 + y^2 + z^2)\sin z]dV = 4\pi\ ?$$

5. Calcule $\int\int_B x^y dA$, onde $B = [0, 1] \times [1, 2]$. Resposta: $\ln(\frac{3}{2})$