Funções de Várias Variáveis - 2º quadrimestre de 2010

Prof.ª Cecilia Chirenti

Lista 1 - Funções, Limites e Continuidade

1. Encontre o domínio das seguintes funções e represente-o graficamente:

   (a) $f(x, y) = \sqrt{x + y - 2}$
   (b) $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$
   (c) $f(x, y) = \frac{1}{x+y-2}$
   (d) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 16}$
   (e) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x-y}}$
   (f) $f(x, y) = \sqrt{y - x} + \sqrt{y - 2}$
   (g) $f(x, y) = \sqrt{xy}$
   (h) $f(x, y) = \log x - y - 2$
   (i) $f(x, y) = \ln(x^2 - y - 1)$
   (j) $f(x, y) = \ln(y - x^3)$

2. Considere a função:

   (a) $f(x, y) = x + y$. Para que valores de x e y tem-se $f(x, y) = 2$? Represente graficamente a resposta.
   (b) $f(x, y) = 2^{x+y}$. Para que valores de x e y tem-se $f(x, y) = 1$? Represente graficamente a resposta.
   (c) $f(x, y) = xy$. Para que valores de x e y tem-se $f(x, y) = 1$? Represente graficamente a resposta.

3. Esboce o gráfico das seguintes funções, com domínio em $\mathbb{R}^2$:

   (a) $f(x, y) = 2$
   (b) $f(x, y) = 5$
   (c) $f(x, y) = 12 - 3x - 4y$
   (d) $f(x, y) = x + y$
   (e) $f(x, y) = 3 + x - y$
   (f) $f(x, y) = x^2 + y^2$
   (g) $f(x, y) = 1 - x^2$
   (h) $f(x, y) = 1 - y^2$

4. Esboce as curvas de nível das funções:

   (a) $f(x, y) = 3x + 4y$
   (b) $f(x, y) = x - y$
   (c) $f(x, y) = 2x - 3y$
   (d) $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$
   (e) $f(x, y) = y - x^2$
   (f) $f(x, y) = y - x^2 + 4$
   (g) $f(x, y) = y - x^3$
   (h) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 2}$
   (i) $f(x, y) = xy$

5. Dada a função $f(x, y) = 2x+3y$, prove, usando a definição, que $\lim_{(x,y)\to(3,4)} f(x, y) = 18$.

6. Determine o conjunto dos pontos de continuidade. Justifique a resposta.

   (a) $f(x,y) = \frac{1}{a^2-x^2-y^2}$

   (b) $f(x,y) = \frac{xy}{y-x^2}$

   (c) $f(x,y) = \ln \frac{x-y}{x^2+y^2}$

   (d) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x-3y}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (e) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

7. Dizemos que a seqüência de pontos $((x_n, y_n))_{n\geq 0}$ converge a $(\bar{x}, \bar{y})$ se, dado $\varepsilon > 0$, existe um natural n_0 tal que

$$n > n_0 \Rightarrow ||(x_n, y_n) - (\bar{x}, \bar{y})|| < \varepsilon\,.$$

   Suponha que $f(x,y)$ seja contínua em $(\bar{x}, \bar{y})$, que $((x_n, y_n))_{n\geq 0}$ convirja para $(\bar{x}, \bar{y})$ e que $(x_n, y_n) \in D(f)$ para todo $n \geq 0$. Prove que a seqüência dada por $a_n = f(x_n, y_n)$ converge para $f(\bar{x}, \bar{y})$.