

Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias

Prof.^a Cecilia Chirenti

Lista 4 - Equações diferenciais de primeira ordem II

1. Resolver as seguintes equações de Bernoulli:

(a) $y' + \frac{y}{x} = xy^2$

(c) $3y' + y = (1 - 2x)y^4$

(b) $y' + y = y^2$

(d) $y' = x^3y^2 + xy$

2. A equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y^2 + B(x)y + C(x)$$

é uma equação de Riccati.

- (a) Mostre que, se $A(x) \equiv 0$, a equação é linear, e se $C(x) \equiv 0$, a equação é uma equação de Bernoulli.

- (b) Mostre que, se y_1 é uma solução da equação de Riccati, a transformação

$$y = y_1 + \frac{1}{v}$$

reduz a equação de Riccati a uma equação linear em v .

- (c) Resolva, usando o item (b), a equação

$$\frac{dy}{dx} = (1 - x)y^2 + (2x - 1)y - x$$

sendo dada a solução $y_1(x) = 1$.

3. Suponha que a taxa de variação em relação ao tempo da população de uma cidade seja dada por

$$\frac{dp}{dt} = Np - Mp^2 + I$$

onde N é a taxa de nascimentos, M é a taxa de óbitos e I é um termo associado à imigração, constante. Resolva a equação diferencial e responda: há equilíbrio populacional neste caso?

4. Considere um paraquedista de $m = 70$ kg e um paraquedas de $m = 10$ kg. Qual é a velocidade terminal se o paraquedas falhar e não abrir? Use $\gamma = 10$ kg/s, $g = 9,8$ m/s² e expresse a velocidade em m/s e em km/h.

5. Certa substância radioativa decresce a uma taxa proporcional à quantidade de substância presente. Se, para uma quantidade inicial de substância de 100 mg, se observa um decréscimo de 5% após dois anos, determine
- uma expressão para a quantidade restante no tempo t
 - o tempo necessário para uma redução de 10% da quantidade inicial.
6. A taxa de variação de temperatura de um corpo é proporcional à diferença de temperatura entre o corpo e o meio ambiente. Seja T a temperatura do corpo e T_m a temperatura do meio ambiente. Então temos

$$\frac{dT}{dt} + kT = kT_m.$$

Um corpo com temperatura desconhecida é colocado em um refrigerador mantido à temperatura constante de 0°C . Se após 20 minutos a temperatura do corpo é 40°C e após 40 minutos é 20°C , determine a temperatura inicial do corpo.

7. Um circuito RC possui uma fonte de 5V, resistência de 10Ω , capacitância de 10^{-2}F e inicialmente uma carga de 5C no capacitor. Determine
- a corrente transitória $i(t)$,
 - a corrente estacionária $i(t \rightarrow \infty)$.
8. Um circuito RL tem uma f.e.m. dada (em volts) por $V(t) = 4\text{sen } t$, resistência de 100Ω , indutância de 4H e corrente inicial zero. Determine a corrente no instante t .
9. Determine as trajetórias ortogonais da família de curvas $x^2 - y^2 = c^2$.
10. Determine as trajetórias ortogonais da família de curvas $y = ce^x$.
11. Determine as trajetórias ortogonais da família de curvas $x^2 - y^2 = cx$.
12. Exercícios do Capítulo 3 do Zill & Cullen e do Capítulo 2 do Boyce & DiPrima.