Funções Complexas e Transformadas Integrais

Prof.ª Cecilia Chirenti

Lista 2 - Funções de variável complexa, equações de Cauchy-Riemann

1. Exprima cada função na forma $u(x,y) + iv(x,y)$, onde u e v são reais.

   (a) $z^3 + 2iz$

   (b) $\dfrac{z}{3+z}$

   (c) e^{z^2}

   (d) $\ln(1+z)$

2. Prove pela definição o limite

   $$\lim_{z \to z_0} z^2 = z_0^2$$

3. Prove pela definição que a função $f(x) = z^2$ é contínua em $z = z_0$.

4. Encontre todas as raízes de $z^5 = 1$.

   (a) Se $z = w$ é uma raiz qualquer de $z^5 = 1$, diferente de 1, prove que todas as raízes são $1, w, w^2, w^3, w^4$.

   (b) Mostre que $1 + w + w^2 + w^3 + w^4 = 0$

   (c) Generalize os resultados em (a) e (b) para a equação $z^n = 1$.

5. Se $w = f(z) = z + \frac{1}{z}$, encontre $\frac{dw}{dz}$ diretamente da definição. Para quais valores finitos de z temos $f(z)$ não-analítica?

6. Seja a função $w = z^4$.

   (a) Encontre funções reais u e v tais que $w = u + iv$.

   (b) Mostre que as equações de Cauchy-Riemann valem em todos os pontos do plano complexo.

   (c) Prove que u e v são funções harmônicas.

   (d) Determine $\frac{dw}{dz}$.

7. Prove que $f(z) = z|z|$ não é analítica em nenhum ponto.

8. Prove que $f(z) = \frac{1}{z-2}$ é analítica em qualquer região que não inclua $z = 2$.

9. Se a parte imaginária de uma função analítica $f(z)$ é $2x(1-y)$, determine

(a) a parte real de $f(z)$ (b) $f(z)$

10. Construa uma função analítica $f(z)$ cuja parte real seja $e^{-x}(x\cos y + y\,\mathrm{sen}\, y)$ e para a qual $f(0) = 1$.

11. Prove que não existe função analítica cuja parte imaginária seja $x^2 - 2y$.

12. Encontre $f(z)$ tal que $f'(z) = 4z - 3$ e $f(1+i) = -3i$.