

Funções de Várias Variáveis

Prof.^a Cecilia Chirenti

Lista 1 - Funções, Limites e Continuidade

1. Encontre o domínio das seguintes funções e represente-o graficamente:

(a) $f(x, y) = \sqrt{x + y - 2}$

(f) $f(x, y) = \sqrt{y - x} + \sqrt{y - 2}$

(b) $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$

(g) $f(x, y) = \sqrt{xy}$

(c) $f(x, y) = \frac{1}{x+y-2}$

(h) $f(x, y) = \log x - y - 2$

(d) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 16}$

(i) $f(x, y) = \ln(x^2 - y - 1)$

(e) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x-y}}$

(j) $f(x, y) = \ln(y - x^3)$

2. Considere a função:

(a) $f(x, y) = x + y$. Para que valores de x e y tem-se $f(x, y) = 2$? Represente graficamente a resposta.

(b) $f(x, y) = 2^{x+y}$. Para que valores de x e y tem-se $f(x, y) = 1$? Represente graficamente a resposta.

(c) $f(x, y) = xy$. Para que valores de x e y tem-se $f(x, y) = 1$? Represente graficamente a resposta.

3. Esboce o gráfico das seguintes funções, com domínio em \mathbb{R}^2 :

(a) $f(x, y) = 2$

(e) $f(x, y) = 3 + x - y$

(b) $f(x, y) = 5$

(f) $f(x, y) = x^2 + y^2$

(c) $f(x, y) = 12 - 3x - 4y$

(g) $f(x, y) = 1 - x^2$

(d) $f(x, y) = x + y$

(h) $f(x, y) = 1 - y^2$

4. Esboce as curvas de nível das funções:

(a) $f(x, y) = 3x + 4y$

(f) $f(x, y) = y - x^2 + 4$

(b) $f(x, y) = x - y$

(g) $f(x, y) = y - x^3$

(c) $f(x, y) = 2x - 3y$

(h) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 2}$

(d) $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$

(e) $f(x, y) = y - x^2$

(i) $f(x, y) = xy$

5. Dada a função $f(x, y) = 2x + 3y$, prove, usando a definição, que $\lim_{(x,y) \rightarrow (3,4)} f(x, y) = 18$.

6. Determine o conjunto dos pontos de continuidade. Justifique a resposta.

(a) $f(x, y) = \frac{1}{a^2 - x^2 - y^2}$

(b) $f(x, y) = \frac{xy}{y-x^2}$

(c) $f(x, y) = \ln \frac{x-y}{x^2+y^2}$

(d) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x-3y}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

(e) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

7. Dizemos que a seqüência de pontos $((x_n, y_n))_{n \geq 0}$ converge a (\bar{x}, \bar{y}) se, dado $\varepsilon > 0$, existe um natural n_0 tal que

$$n > n_0 \Rightarrow \|(x_n, y_n) - (\bar{x}, \bar{y})\| < \varepsilon.$$

Suponha que $f(x, y)$ seja contínua em (\bar{x}, \bar{y}) , que $((x_n, y_n))_{n \geq 0}$ convirja para (\bar{x}, \bar{y}) e que $(x_n, y_n) \in D(f)$ para todo $n \geq 0$. Prove que a seqüência dada por $a_n = f(x_n, y_n)$ converge para $f(\bar{x}, \bar{y})$.