

## Funções de Várias Variáveis

Prof.<sup>a</sup> Cecilia Chirenti

### Lista 6 - Integrais Duplas e Triplas - Teoremas

1. Calcular as integrais duplas abaixo:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \int_2^3 \int_{-1}^2 (2x + 3y + 6) dx dy & \text{(d)} \int_0^e \int_0^e \frac{dx dy}{xy} \\ \text{(b)} \int_0^b \int_0^a (x + y) dx dy & \text{(e)} \int_{-1}^2 \int_{2x^2-2}^{x^2+x} y dy dx \\ \text{(c)} \int_0^2 \int_0^\infty e^{-x} dx dy & \text{(f)} \int_0^1 \int_{x^2}^{2-x} x^2 dy dx \\ \text{(g)} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \text{sen}(2mx + 2ny) dx dy & \\ \text{(h)} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} (a \cos 2\theta + b \text{sen } 2\theta) d\theta dy & \end{array}$$

2. Calcular as integrais triplas abaixo:

$$\begin{array}{l} \text{(a)} \int_{-3}^3 \int_0^1 \int_1^2 (x + y + z) dx dy dz \\ \text{(b)} \int_0^a \int_0^b \int_0^c (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz \\ \text{(c)} \int_0^1 \int_{y^2}^1 \int_0^{1-x} x dz dy dx \\ \text{(d)} \int_0^r \int_0^\alpha \int_0^\beta (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz, \text{ onde } r \text{ é constante, } \alpha = \sqrt{r^2 - z^2} \\ \text{e } \beta = \sqrt{r^2 - y^2 - z^2}. \end{array}$$

3. Calcular:

$$\begin{array}{l} \text{(a)} \iint_R x^2 dx dy \text{ onde } R \text{ é o retângulo } |x| + |y| \leq 1. \\ \text{(b)} \iint_R r \cos \theta dr d\theta \text{ onde } R \text{ é o círculo } r = a \cos \theta. \\ \text{(c)} \iint_R (x + y) dx dy \text{ onde } R \text{ é a região limitada pelas retas } z = 0, y = 0 \text{ e } \\ x + y = 2. \end{array}$$

- (d)  $\iint_R x^2 y^2 dx dy$  onde  $R$  é o círculo  $x^2 + y^2 \leq 1$
4. Calcular  $\iint_R xy dx dy$  onde  $R$  é:
- o triângulo  $x = 0, y = 0, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ . ( $a, b > 0$ );
  - o setor  $x = 0, y = 0, x^2 + y^2 = a^2$ ;
  - a área determinada pelo segmento de parábola  $y^2 = 2x$  e pela reta  $x = 2$ .
5. Calcular  $\iint_R \frac{dx dy}{1 + x^2 + y^2}$  onde  $R$  é a região limitada por  $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$   
(Sugestão: usar coordenadas polares).
6. Calcular  $\iiint_R \frac{dx dy dz}{\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}}$  onde  $R$  é a esfera  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ .  
(Sugestão: usar coordenadas esféricas.)
7. Calcular  $\iiint_R x^3 y^2 z dx dy dz$  onde  $R$  é a região definida pelas desigualdades  
 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x$  e  $0 \leq z \leq xy$ .
8. Calcular  $\iiint_R xyz dx dy dz$  onde  $R$  é o primeiro octante do elipsóide  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ .
9. Achar a área da região compreendida entre a parábola  $x^2 + 8y = 16$  e a reta  $4y = 3x$ .
10. Calcular usando o teorema de Green a integral de linha  $\oint (x^3 - 3xy^2) dx + (3x^2y - y^3) dy$  sendo  $R$  o primeiro quadrante do círculo  $x^2 + y^2 = 1$ .
11. Verificar o teorema de Green para a integral  $\oint_C (x + y) dx + (y - x) dy$  onde  $C$  é o contorno fechado formado pelas parábolas  $y = x^2$  e  $y^2 = x$ .
12. Verificar o teorema de Green para a integral  $\oint_C (2x - y^3) dx - xy dy$  onde  $C$  é formado pelas circunferências  $x^2 + y^2 = 4$  e  $x^2 + y^2 = 9$ .
13. Calcular por meio do teorema de Green a integral  $\iint_R y^2 dx dy$  onde  $R$  é a região limitada pela curva  $x = a(1 - \sin^2 \theta), y = a \sin^2 \theta$  com  $(0 \leq \theta \leq \pi)$ .
14. Exercícios dos Capítulos 3-5 e 8 do livro Um Curso de Cálculo, vol. 3, H.L. Guidorizzi.
15. Exercícios dos Capítulos 15 e 16.4-5 do livro Cálculo, vol. 2, J. Stewart.