Álgebra Linear - Prof.ª Cecilia Chirenti

Lista 1 - Vetores no $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$

1. Sejam $u = (1, -2, 5)$ e $v = (3, 1, -2)$ dois vetores do $\mathbb{R}^3$. Encontre:

   (a) $u + v$
   (b) $-6u$
   (c) $2u - 5v$
   (d) $u \cdot v$
   (e) $|u|$ e $|v|$
   (f) $d(u, v)$

2. Sejam $u = (2, -1, 0, -3)$, $v = (1, -1, -1, 3)$ e $w = (1, 3, -2, 2)$ três vetores do $\mathbb{R}^4$. Encontre:

   (a) $2u - 3v$
   (b) $5u - 3v - 4w$
   (c) $-u + 2v - 2w$
   (d) $u \cdot v$, $u \cdot w$ e $v \cdot w$
   (e) $d(u, v)$ e $d(v, w)$

3. Determine k para que os vetores u e v sejam ortogonais

   (a) $u = (3, k, -2)$, $v = (6, -4, -3)$
   (b) $u = (5, k, -4, 2)$, $v = (1, -3, 2, 2k)$
   (c) $u = (1, 7, k + 2, -2)$, $v = (3, k, -3, k)$

4. Determine x e y se

   (a) $(x, x + y) = (y - 2, 6)$
   (b) $x(1, 2) = -4(y, 3)$

5. Determine x, y e z se

   (a) $(3, -1, 2) = x(1, 1, 1) + y(1, -1, 0) + z(1, 0, 0)$
   (b) $(-1, 3, 3) = x(1, 1, 0) + y(0, 0, -1) + z(0, 1, 1)$

6. Sejam $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ e $e_1 = (0, 0, 1)$. Mostre que, para qualquer vetor $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$,

   (a) $u = ae_1 + be_2 + ce_3$
   (b) $u \cdot e_1 = a$, $u \cdot e_2 = b$ e $u \cdot e_3 = c$

7. Generalize o resultado do problema anterior da seguinte maneira. Seja e_i o vetor com 1 na i-ésima coordenada e 0 em todas as outras:

   $e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0, 0)$
   $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0, 0)$
   $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$
   $e_n = (0, 0, 0, \ldots, 0, 1)$

   Mostre que, para qualquer vetor $u = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$,

(a) $u = a_1e_1 + a_2e_2 + \ldots + a_ne_n$

(b) $u \cdot e_i = a_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

8. Suponha que $u \in \mathbb{R}^n$ tem a propriedade $u \cdot v = 0$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$. Mostre que $u = 0$.

9. Usando $d(u, v) = |u - v|$ e as propriedades da norma de um vetor, mostre que a função distância satisfaz as seguintes propriedades para quaisquer vetores $u,\ v,\ w \in \mathbb{R}^n$:

   (a) $d(u, v) \geq 0$ e $d(u, v) = 0$ se, e somente se, $u = v$

   (b) $d(u, v) = d(v, u)$

   (c) $d(u, w) \leq d(v, u) + d(v, w)$

10. Sejam $z = 2 + i$ e $w = 7 + 3i$. Encontre

   (a) $z + w$

   (b) zw

   (c) z/w

   (d) $\bar{z},\ \bar{w}$

   (e) $|z|,\ |w|$

   (f) z^2

11. Seja $z \in \mathbb{C}$. Mostre que

   (a) $zz^{-1} = 1$

   (b) $z = \bar{\bar{z}}$

   (c) $\text{Re}\ (z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$

   (d) $\text{Im}\ (z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

12. Mostre que $zw = 0$ implica $z = 0$ ou $w = 0$.

13. Sejam $u = (1+7i, 2-6i)$ e $v = (5-2i, 3-4i)$ dois vetores do $\mathbb{C}^2$. Encontre

   (a) $u + v$

   (b) $(3 + i)u$

   (c) $2iu + (4 - 7i)v$

   (d) $u \cdot v$ e $v \cdot u$

   (e) $|u|$ e $|v|$

14. Sejam $u = (3 - 7i, 2i, -1 + i)$ e $v = (4 - i, 11 + 2i, 8 - 3i)$ dois vetores do $\mathbb{C}^3$. Encontre

   (a) $u - v$

   (b) $(3 + i)v$

   (c) $u \cdot v$ e $v \cdot u$

   (d) $|u|$ e $|v|$

15. Para quaisquer vetores $u,\ v,\ w \in \mathbb{C}^n$, mostre que

   (a) $(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$

   (b) $w \cdot (u + v) = w \cdot u + w \cdot v$

16. Demostre que a norma de uma vetor em $\mathbb{C}^n$ satisfaz as seguintes propriedades:

(a) para qualquer vetor u, $|u| \geq 0$; e $|u| = 0$ se, e somente se, $u = 0$

(b) para qualquer vetor u e qualquer número complexo z, $|zu| = |z||u|$

(c) para quaisquer vetores u e v, $|u+v| \leq |u| + |v|$

17. Encontre uma equação para o plano do $\mathbb{R}^3$ que

    (a) passa por $(2, -7, 1)$ e é normal a $(3, 1, -11)$

    (b) contém $(1, -2, 2)$, $(0, 1, 3)$ e $(0, 2, -1)$

    (c) contém $(1, -5, 2)$ e é paralelo a $3x - 7y + 4z = 5$

18. Determine o valor de k tal que $2x - ky + 4z - 5w = 11$ é perpendicular a $7x + 2y - z + 2w = 8$. (Dois hiperplanos são perpendiculares se, e somente se, os vetores normais correspondentes são ortogonais.

19. Encontre uma representação paramétrica da reta que

    (a) passa por $(7, -1, 8)$ na direção de $(1, 3, -5)$

    (b) passa por $(1, 9, -4, 5)$ e $(2, -3, 0, 4)$

    (c) passa por $(4, -1, 9)$ e é perpendicular ao plano $3x - 2y + z = 18$

20. Sejam P, Q e R pontos da reta determinada por

$$
\begin{array}{l}
x_1 = a_1 + u_1 t \\
x_2 = a_2 + u_2 t \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_n = a_n + u_n t
\end{array}
$$

que correspondem, respectivamente, aos valores t_1, t_2 e t_3 para t. Mostre que, se $t_1 < t_2 < t_3$, então $d(P, Q) + d(Q, R) = d(P, R)$.