Álgebra Linear - Prof.ª Cecilia Chirenti

Lista 7 - Matriz de uma Transformação Linear

1. Encontre a matriz de cada um dos seguintes operadores lineares T no $\mathbb{R}^2$ em relação à base usual $\{e_1 = (1,0),\ e_2 = (0,1)\}$

   (a) $T(x,y) = (2x-3y, x+y)$

   (b) $T(x,y) = (5x+3y, 3x-2y)$

2. Encontre a matriz de cada operador T no problema anterior em relação à base $\{f_1 = (1,2),\ f_2 = (2,3)\}$. Em cada casa, verifique que $[T]_f[v]_f = [T(v)]_f$ para qualquer $v \in \mathbb{R}^2$.

3. Seja D o operador diferencial, isto é, $D(f) = df/dt$. Cada um dos seguintes conjuntos é base de um espaço vetorial V de funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Encontre a matriz de D em cada uma das bases:

   (a) $\{e^t, e^{2t}, te^{2t}\}$

   (b) $\{\text{sen}t, \cos t\}$

   (c) $\{e^{5t}, te^{5t}, t^2e^{5t}\}$

   (d) $\{1, t, \text{sen}3t, \cos 3t\}$

4. Considere o corpo complexo $\mathbb{C}$ como um espaço vetorial sobre o corpo real $\mathbb{R}$. Seja T o operador conjugação em $\mathbb{C}$, isto é, $T(z) = \bar{z}$. Encontre a matriz de T em cada uma das bases

   (a) $\{1, i\}$

   (b) $\{1+i, 1+2i\}$

5. Seja V o espaço vetorial das matrizes 2×2 sobre $\mathbb{R}$ e seja $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
   Encontre a matriz de cada um dos seguintes operadores lineares T em V na base usual:

   (a) $T(A) = MA$

   (b) $T(A) = AM$

   (c) $T(A) = MA - AM$

6. Sejam $F,\ G \in L(\mathbb{R}^3)$ assim definidos: $F(x,y,z) = (x+y, z+y, z)$ e $G(x,y,z) = (x+2y, y-z, x+2z)$. Determine

   (a) $F \circ G$

   (b) $\ker(F\circ G)$ e $\text{Im}(G \circ F)$

   (c) uma base e a dimensão de $\ker(F^2 \circ G)$

7. Seja $F \in L(\mathbb{R}^2)$ o operador dados por $F(1,0) = (2,5)$ e $F(0,1) = (3,4)$. Verifique se são automorfismos do $\mathbb{R}^2$: $G = I + F$ e $H = I + F + F^2$.

8. Mostre que um operador $F \in L(V)$ é idempotente se, e somente se, $I - F$ é idempotente.

9. Seja $F \in P_2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ definida por $F(p(t)) = \int_{-1}^{1} p(t)\, dt$. Determine a matriz de F em relação às bases

   (a) $B = \{1, t, t^2\}$ e $C = 1$

   (b) $B = \{1, 1+t, -1^2\}$ e $C = \{-2\}$

10. Determine todos os operadores lineares F do $\mathbb{R}^2$ tais que $F^2 = 0$ (operador nulo) e que $F(x, y) = (ax + by, cy)$.

11. Considere as seguintes bases do $\mathbb{R}^2$: $\{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$ e $\{f_1 = (1, 2), f_2 = (2, 3)\}$.

    (a) Encontre as matrizes de transição P e Q de $\{e_i\}$ para $\{f_i\}$ e de $\{f_i\}$ para $\{e_i\}$, respectivamente. Verifique que $Q = P^{-1}$

    (b) Mostre que $[v]_e = P[v]_f$ para qualquer vetor $v \in \mathbb{R}^2$.

    (c) Mostre que $[T]_f = P^{-1}[T]_e P$ para cada operador T no problema 1.

12. Repita o problema anterior para as bases $\{f_1 = (1, 2), f_2 = (2, 3)\}$ e $\{g_1 = (1, 3), g_2 = (1, 4)\}$.

13. Suponha que $\{e_1, e_2\}$ é base de V e $T : V \to V$ é o operador linear para o qual $T(e_1) = 3e_1 - 2e_2$ e $T(e_2) = e_1 + 4e_2$. Suponha que $\{f_1, f_2\}$ é a base de V para a qual $f_1 = e_1 + e_2$ e $f_2 = 2e_1 + 3e_2$. Encontre a matriz de T na base $\{f_1, f_2\}$.

14. Considere as bases $B = \{1, i\}$ e $B' = \{1 + i, 1 + 2i\}$ do corpo complexo $\mathbb{C}$ sobre o corpo real $\mathbb{R}$.

    (a) Encontre as matrizes de transição P e Q de B para B' e de B' para B, respectivamente. Verifique que $Q = P^{-1}$

    (b) Mostre que $[T]_{B'} = P^{-1}[T]_B P$ para o operador conjugação T definido no problema 4.

15. Suponha que $\{e_i\}$, $\{f_i\}$ e $\{g_i\}$ são bases de V e que P e Q são as matrizes de transição de $\{e_i\}$ para $\{f_i\}$ e de $\{f_i\}$ para $\{g_i\}$, respectivamente. Mostre que PQ é a matriz de transição de $\{e_i\}$ para $\{g_i\}$.

16. Seja A a matriz 2×2 tal que somente A é a semelhante a ela mesma. Mostre que A tem a forma $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

17. Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por $F(x, y, z) = (2x + y - z, 3x - 2y + 4z)$.

    (a) Encontre a matriz de F nas seguintes bases de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$: $\{f_1 = (1, 1, 1), f_2 = (1, 1, 0), f_3 = (1, 0, 0)\}$ e $\{g_1 = (1, 3), g_2 = (1, 4)\}$.

(b) Verifique que, para qualquer vetor $v \in \mathbb{R}^3$, $[F]_{gf}[v]_f = [F(v)]_g$.

18. Mostre que um operador T é diagonalizável se, e somente se, existe uma matriz inversível P tal que $P^{-1}AP$ é uma matriz diagonal, onde A é a representação matricial de T.