Álgebra Linear - Prof.ª Cecilia Chirenti

Lista 8 - Autovalores e Autovetores

1. Sejam $f(t) = 2t^2 - 5t + 6$ e $g(t) = t^3 - 2t^2 + t + 3$. Encontre $f(A)$, $g(A)$, $f(B)$ e $g(B)$, onde $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Seja V o espaço vetorial dos polinômios $v(x) = ax^2 + bx + c$. Seja $D : V \to V$ o operador diferencial. Seja $f(t) = t^2 + 2t - 5$. Encontre $f(D)(v(x))$.

3. Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Encontre A^2, A^3, A^n.

4. Seja $B = \begin{pmatrix} 8 & 12 & 0 \\ 0 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$. Encontre uma matriz real A tal que $B = A^3$.

5. Mostre que, para qualquer matriz quadrada (ou operador) A, $(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$, onde P é inversível. Mais generalizado, mostre que $f(P^{-1}AP) = P^{-1}f(A)P$ para qualquer polinômio $f(t)$.

6. Para cada matriz, encontre todos os autovalores e autovetores linearmente independentes:

   (a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ (b) $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ (c) $C = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

   Encontre as matrizes inversíveis P_1, P_2 e P_3 tais que $P_1^{-1}AP_1$, $P_2^{-1}BP_2$, $P_3^{-1}CP_3$ sejam diagonais.

7. Para cada matriz, encontre todos os autovalores e uma base para cada auto-espaço:

   (a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ (c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   (b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

   Quando possível, encontre matrizes inversíveis P_1, P_2 e P_3 tais que $P_1^{-1}AP_1$, $P_2^{-1}BP_2$, $P_3^{-1}CP_3$ sejam diagonais.

8. Para cada uma das seguintes matrizes sobre o corpo complexo $\mathbb{C}$, encontre todos os autovalores e autovetores linearmente independentes:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & i \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & -3i \\ i & -1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

9. Seja $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a matriz de um operador do $\mathbb{R}^2$. Ache os valores próprios de T.

10. Suponha que v é um autovetor dos operadores S e T. Mostre que v também é um autovetor do operador $aS + bT$, onde a e b são escalares quaisquer.

11. Suponha que v é um autovetor do operador T pertencente ao autovalor λ. Mostre que, para $n > 0$, v também é um autovetor de T pertencente a λ^n.

12. Suponha que λ é um autovalor de um operador T. Mostre que $f(\lambda)$ é um autovalor de $f(T)$.

13. Mostre que matrizes semelhantes têm os mesmos autovalores.

14. Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Mostre que A e B têm polinômios característicos diferentes (logo, não são semelhantes), mas têm o mesmo polinômio mínimo. Assim matrizes, nã–singulares podem ter o mesmo polinômio mínimo.

15. A transformação $T : V \to V$ definida por $T(v) = kv$ é chamada a transformação escalar pertencente a $k \in K$. Mostre que T é a transformação escalar pertencente a $k \in K$ se, e somente se, o polinômio mínimo de T é $m(t) = t - k$.

16. Encontre uma matriz A, cujo polinômio mínimo é

    (a) $t^3 - 5t^2 + 6t + 8$

    (b) $t^4 - 5t^3 - 2t^2 + 7t + 4$

17. Seja $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ uma matriz sobre o corpo real $\mathbb{R}$. Encontre condições necessárias e suficientes em a, b, c e d para que A seja diagonalizável, isto é, tenha dois autovetores linearmente independentes.

18. Repita o problema acima para o caso em que A é uma matriz sobre o corpo complexo $\mathbb{C}$.

19. Mostre que uma matriz (operador) é diagonalizável se, e somente se, seu polinômio mínimo é um produto de fatores lineares distintos.

20. Determinar uma matriz $M \in M_4(\mathbb{R})$, inversível, tal que $M^{-1}AM$ seja diagonal, onde $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

21. Estudar quanto à possibilidade de diagonalização as matrizes:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & 2 & 0 \\ n & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} -1 & -4 & -2 & -2 \\ -4 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$