

Bases Matemáticas - 3º quadrimestre de 2012

Prof.^a Cecilia Chirenti

Lista 3 - Conjuntos II - Conjuntos Numéricos

1. Decida qual das afirmações abaixo é correta ou incorreta:

- | | |
|---------------------------------|-----------------------------------|
| (a) $\pi \in \mathbb{Q}$ | (f) $-5 \in \mathbb{Z}$ |
| (b) $3 \in \mathbb{Z}$ | (g) $\sqrt{-3} \in \mathbb{R}$ |
| (c) $-3 \in \mathbb{N}$ | (h) $\sqrt[3]{2} \in \mathbb{Q}'$ |
| (d) $\sqrt{-1} \in \mathbb{Q}'$ | (i) $\frac{2}{3} \in \mathbb{Z}$ |
| (e) $\sqrt{9} \in \mathbb{N}$ | (j) $2 \in \mathbb{Q}$ |

2. Use o princípio da indução finita para provar:

- (a) $\log(a_1 a_2 \cdots a_n) = \log a_1 + \log a_2 + \cdots + \log a_n$
- (b) $1 + 2 + \cdots + n = \frac{(n+1)n}{2}$
- (c) $1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}, r \neq 1$
- (d) $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$
- (e) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$
- (f) $1(5) + 2(5)^2 + 3(5)^3 + \cdots + n(5)^{n-1} = \frac{5+(4n-1)5^{n+1}}{16}$
- (g) $x^{2n-1} + y^{2n-1}$ é divisível por $x + y$ para $n = 1, 2, 3, \dots$
- (h) $\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}x}, x \neq 0, x \neq \pm 2\pi, x \neq \pm 4\pi, \dots$
- (i) $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \cdots + \operatorname{sen} nx = \frac{\cos \frac{1}{2}x - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}x}, x \neq 0, x \neq \pm 2\pi, x \neq \pm 4\pi, \dots$

3. Considere a fórmula do Binômio de Newton: $(a+b)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$, onde os coeficientes binomiais são definidos como $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$, e temos $\binom{n}{0} = 1$ e $\binom{n}{n} = 1$.

- (a) Prove que $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

(b) Prove pelo princípio da indução finita que a fórmula do Binômio de Newton é válida para todo n natural.

4. Prove as seguintes propriedades dos coeficientes binomiais:

(a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

(b) $1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$

(c) $1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$

(d) $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \dots + n\binom{n}{n} = 2^{n-1}n$

5. Decida qual das afirmações abaixo é (a) sempre correta, (b) correta às vezes ou (c) incorreta. Considere aqui $a \neq 0$ e $b \neq 0$.

(a) $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Q}$ e $a - b \in \mathbb{N}$

(d) $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{Q}'$ e $a + b \in \mathbb{Q}'$

(b) $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{Z}$ e $ab \in \mathbb{Z}$

(c) $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{Q}'$ e $a/b \in \mathbb{Q}$

(e) $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Q}$ e $a/b \in \mathbb{N}$

6. Considere os conjuntos $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}', \mathbb{Z}$ e \mathbb{N} . Quais destes conjuntos não são fechados pelas operações de (1) adição e (2) multiplicação (exceto por 0)?

7. Resolva as inequações:

(a) $x^2 + 3 > 0$

(f) $(2x + 1)(x^2 + x + 1) \leq 0$

(b) $x^2 + x + 1 < 0$

(g) $x(x^2 + 1) \geq 0$

(c) $x^2 + x + 1 \leq 0$

(h) $(1 - x)(x^2 + 2x + 2) < 0$

(d) $x^2 + 5 \leq 0$

(i) $\frac{2x-3}{x^2+1} > 0$

(e) $(x - 3)(x^2 + 5) > 0$

(j) $\frac{x}{x^2+x+1} \geq 0$

8. Resolva as inequações:

(a) $|x| \leq 1$

(h) $|x + 3| > 1$

(b) $|2x - 1| < 3$

(i) $|2x - 3| > 3$

(c) $|3x - 1| < -2$

(j) $|2x - 1| < x$

(d) $|3x - 1| < \frac{1}{3}$

(k) $|x + 1| < |2x - 1|$

(e) $|2x^2 - 1| < 1$

(l) $|x - 1| - |x + 2| > x$

(f) $|x - 3| < 4$

(m) $|x - 3| < x + 1$

(g) $|x| > 3$

(n) $|x - 2| + |x - 1| > 1$

9. Elimine o módulo:

(a) $|x + 1| + |x|$

(c) $|2x - 1| + |x - 2|$

(b) $|x - 2| - |x + 1|$

(d) $|x| + |x - 1| + |x - 2|$

10. Prove que é irracional: (a) $\sqrt{6}$ e (b) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

11. $x = \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}$ é racional ou irracional? Justifique.

12. Sejam x e y dois reais quaisquer, com $0 < x < y$. Prove que $\sqrt{y - x} > \sqrt{y} - \sqrt{x}$.

13. Se $a^2 + b^2 = 1$ e $c^2 + d^2 = 1$, prove que $ac + bd \leq 1$.

14. Se $x > 0$, prove que $x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} > x^n + \frac{1}{x^n}$, onde n é um inteiro positivo qualquer.

15. Prove:

(a) $|x + y| \leq |x| + |y|$

(b) $|x + y + z| \leq |x| + |y| + |z|$

(c) $|x - y| \geq |x| - |y|$