Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias

Prof.ª Cecilia Chirenti

Exercício para nota: Ressonância

Considere o oscilador harmônico forçado que obedece à equação baixo

$$\frac{d^2X}{dt^2} + 2b\frac{dX}{dt} + \omega_0^2 X = F\cos\omega_1 t\,.$$

(a) Responda física e matematicamente: depois de passado muito tempo, a solução da equação acima ainda depende das condições iniciais? A solução da equação homogênea associada (também chamada de solução transiente) é importante para tempos grandes? E a solução particular da equação não homogênea (também chamada de regime permanente)?

(b) Mostre que a solução particular X_p pode ser escrita como

$$X_p = \frac{F}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega_1^2)^2 + 4b^2\omega_1^2}}\cos(\omega_1 t - \theta)\,,$$

onde $\operatorname{tg}\theta = \frac{2b\omega_1}{(\omega_0^2-\omega_1^2)}$.

(c) Considerando que ω_0, b e F são fixos para um dado sistema, a amplitude é uma função da frequência angular ω_1 da força externa, ou seja,

$$A(\omega_1) = \frac{F}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega_1^2)^2 + 4b^2\omega_1^2}}\,.$$

Encontre os pontos críticos de $A(\omega_1)$ e esboce o seu gráfico.

(d) Usando o resultado do item (c), discuta o que deve acontecer se não houver amortecimento e a frequência ω_1 da força externa tender à frequência natural do sistem, ω_0.

(e) Para entender o caso proposto no item (d), você deve resolver a equação

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \omega_0^2 X = F\cos\omega_0 t\,.$$

Mostre que a solução particular é dada por

$$X_p = \frac{F}{2\omega_0} t \operatorname{sen}\omega_0 t$$

e esboce o seu gráfico.